@Kiau_IT www.mohandesidl.ir

عنوان صفحه

فصل اول - آمار توصیفی ۱
۱.۱ آمار چیست ۱
۲.۱ آمار توصیفی ۲
۳.۱ جدولهای آماری ۴
۴.۱ نمودارهای آماری ۱۰
۵.۱ خلاصه کردن داده‌ها در چند عدد ۱۳
۶.۱ تمرینات ۲۳
فصل دوم - احتمال ۲۹
۱.۲ مقدمه ۲۹
۲.۲ فضای نمونه و پیشامد ۲۹
۳.۲ احتمال ۳۴
۴.۲ چند قانون احتمال ۳۷
۵.۲ قواعد شمارش ۴۰
۶.۲ مدل احتمال روی فضای نمونه نامتناهی ۴۸
۷.۲ احتمال شرطی ۵۱
۸.۲ فرمول احتمال بیز و فرمول تفکیک احتمال ۵۵
۹.۲ مسائل حل شده ۵۹
۱۰.۲ تمرینات ۷۷
فصل سوم - متغیرهای تصادفی ۸۷
۱.۳ مفهوم متغیر تصادفی ۸۷
۲.۳ توزیع احتمالات گسسته ۹۰
۳.۳ توزیع احتمالات پیوسته ۹۶
۴.۳ توزیع احتمالات توأم دو متغیره ۱۰۰
۵.۳ توزیع احتمالات چند متغیره ۱۱۱
۶.۳ مسائل حل شده ۱۱۴

@Kiau_IT www.mohandesidl.ir

۱۳۲

۷.۳ تمرینات ... ۱۴۱

فصل چهارم - امید ریاضی ... ۱۴۱

۱.۴ مفهوم و تعریف امید ریاضی ... ۱۴۱

۲.۴ امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی ... ۱۴۳

۳.۴ قوانین امید ریاضی ... ۱۴۷

۴.۴ امیدهای ریاضی خاص ... ۱۵۰

۵.۴ امید ریاضی و واریانس شرطی ... ۱۵۵

۶.۴ مسائل حل شده ... ۱۵۷

۷.۴ تمرینات ... ۱۷۱

فصل پنجم - برخی توزیعهای احتمال ... ۱۷۹

۱.۵ مقدمه ... ۱۷۹

۲.۵ توزیع برنولی ... ۱۸۰

۳.۵ توزیع دو جمله‌ای ... ۱۸۱

۴.۵ توزیع فوق هندسی ... ۱۸۴

۵.۵ توزیع پواسون ... ۱۸۷

۶.۵ توزیع دو جمله‌ای منفی ... ۱۹۰

۷.۵ توزیع هندسی ... ۱۹۱

۸.۵ توزیع یکنواخت گسسته ... ۱۹۲

۹.۵ توزیع یکنواخت پیوسته ... ۱۹۳

۱۰.۵ توزیع نمایی ... ۱۹۴

۱۱.۵ توزیع نرمال ... ۱۹۷

۱۲.۵ مسائل حل شده ... ۲۰۴

۱۳.۵ تمرینات ... ۲۲۰

فصل ششم - توزیعهای نمونه‌ای ... ۲۳۱

۱.۶ نمونه تصادفی و توزیع نمونه‌ای ... ۲۳۱

۲.۶ توزیع نمونه‌ای میانگین نمونه $\bar{X}$ ... ۲۳۵

۳.۶ توزیع نمونه‌ای واریانس نمونه S^2 ... ۲۳۷

۴.۶ توزیع نمونه‌ای $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ... ۲۳۹

۵.۶ توزیع نمونه‌ای اختلاف میانگین ها

۶.۶ توزیع نمونه‌ای نسبت واریانسهای نمونه ۲۴۴
۷.۶ تمرینات ۲۴۶
فصل هفتم - نظریهٔ برآوردیابی ۲۵۱
۱.۷ استنباط آماری ۲۵۱
۲.۷ برآورد پارامتر مجهول جمعیت ۲۵۲
۳.۷ برآورد میانگین جمعیت ۲۵۶
۴.۷ برآورد واریانس جمعیت ۲۶۰
۵.۷ برآورد تفاضل میانگین دو جمعیت ۲۶۲
۶.۷ برآورد نسبت واریانس دو جمعیت ۲۶۵
۷.۷ تمرینات ۲۶۷
فصل هشتم - آزمون فرضهای آماری ۲۷۵
۱.۸ مفاهیم اولیه ۲۷۵
۲.۸ آزمونهای فرضهای آماری روی پارامترهای جمعیت ۲۸۱
۳.۸ آزمون برازندگی ۲۹۱
۴.۸ تمرینات ۲۹۶
فصل نهم - رگرسیون خطی و همبستگی ۳۰۵
۱.۹ مقدمه ۳۰۵
۲.۹ رگرسیون سادهٔ خطی ۳۰۶
۳.۹ استنباط آماری روی ضرایب رگرسیونی ۳۱۰
۴.۹ ضریب همبستگی خطی ۳۱۴
۵.۹ تمرینات ۳۱۸
ضمیمه - جداول آماری ۳۲۳
جدول I: توزیع دو جمله‌ای ۳۲۴
جدول II: توزیع پواسون ۳۲۵
جدول III: توزیع نرمال ۳۲۸
جدول IV: توزیع مربع -کای ۳۲۹
جدول V: توزیع t ۳۳۰
جدول VI: توزیع F ۳۳۱

فصل اول

آمار توصیفی

۱.۱ آمار چیست

در اصطلاح عامیانه آمار به معنای ثبت و نمایش اطلاعات عددی در مورد یک موضوع، مثلاً ثبت و نمایش تعداد بیکاران، تعداد تصادفات رانندگی، میزان محصولات کشاورزی، میزان صدور نفت، جمعیت شهر تهران و غیره می‌باشد. ولی علم آمار امروزه دارای مفهومی بسیار وسیعتر از این کاربرد عامیانه است. مفاهیم عامیانهٔ آمار زیر مجموعه‌ای از آمار مصطلح بین آماردانان است. از نقطه نظر علمی آمار به مجموعهٔ روشهایی برای جمع آوری، تنظیم و خلاصه کردن اطلاعات عددی و غیر عددی و انجام استنباط و نتیجه گیری بوسیلهٔ تجزیه و تحلیل آنها، اطلاق می‌شود. در این اثر با چنین مفاهیمی مواجه هستیم. بحث خود را با آمار توصیفی آغاز می‌کنیم و با ارائه مطالبی از احتمالات به مبحث استنباط آماری می‌پردازیم.

در بررسی صفاتی از یک جمعیت به علت بزرگ بودن جمعیت، پر هزینه بودن بررسی و سایر معضلات، اغلب اوقات در بررسی تمامی اعضای جمعیت با مشکل مواجه می‌شویم. برای رفع این مشکل از نمونه استفاده می‌کنیم. یعنی از جمعیت اعضای مناسبی را انتخاب می‌کنیم و به مطالعهٔ صفات مورد نظر در این اعضا می‌پردازیم. اگر نمونه گیری با دقت آماری کافی صورت پذیرد آنگاه نتایج حاصل برای نمونه به سادگی برای جمعیت قابل تعمیم است.

مثال ۱.۱.۱ در بررسی آماری کیفیت کالاهای تولیدی یک کارخانه با مشکل پر هزینه بودن، وقت گیر بودن، از بین رفتن کالای مورد بررسی و غیره مواجه هستیم. از این رو به جای بررسی

@Kiau_IT www.mohandesidl.ir

یک تک محصولات یک کارخانه فقط تعداد کمی از آنها را به تصادف انتخاب و مورد بررسی قرار می‌دهیم و با تعیین شاخصهایی در این نمونه به بررسی پارامترهای مورد نظر در تولید کل محصولات تولیدی می‌پردازیم. مثلاً اگر از تولیدات لامپ یک کارخانهٔ لامپ سازی در یک روز ۱۰۰ لامپ را به طور تصادفی انتخاب کرده و مشاهده کنیم که ۵ عدد از آنها معیوب هستند، در این صورت ۵٪ لامپهای مشاهده شده معیوب هستند. هم اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا از روی این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که ۵٪ از کل لامپهای تولیدی این کارخانه معیوب می‌باشند؟ توسط روشهای آماری می‌توان به این سؤال و کلاً این نوع نتیجه گیریها پاسخ داد.

با توجه به مطالب گفته شده، در یک بررسی آماری با دو بخش آمار توصیفی و آمار استنباطی مواجه هستیم. در آمار توصیفی با تهیه، تنظیم و خلاصه کردن اطلاعات عددی و غیر عددی سروکار داریم و حال آنکه تجزیه و تحلیل و نتیجه‌گیری آماری به آمار استنباطی برمی‌گردد. برای اینکه بتوان از روی مشاهدات قسمتی از جمعیت یک نتیجه گیری و قضاوت منطقی و علمی در مورد کل جمعیت داشته باشیم از نظریهٔ احتمالات استفاده می‌کنیم. بحث این فصل به آمار توصیفی اختصاص دارد.

۲.۱ آمار توصیفی

روشهایی که بوسیلهٔ آنها می‌توان اطلاعات جمع آوری شده را تنظیم، طبقه‌بندی و خلاصه نمود و آنها را بوسیلهٔ نمودارهایی نمایش داد به آمار توصیفی موسوم است. برای معرفی این روشها نیاز به برخی اصطلاحات داریم که در ذیل به معرفی آنها می‌پردازیم.

جمعیت: مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که مطالعات آماری در مورد یک یا چند صفت آنها در یک مکان و زمان معین انجام می‌گیرد به جمعیت موسوم است. هر یک از این افراد یا اشیا را یک عضو جمعیت می‌نامند و تعداد اعضای جمعیت را اندازهٔ جمعیت می‌نامند.

برای مثال اگر بخواهیم معدل دانشجویان یک دانشکده در یک نیمسال را مورد بررسی قرار دهیم آنگاه جمعیت مورد نظر کلیهٔ دانشجویان آن دانشکده می‌باشند و صفت مورد مطالعه معدل نیمسال تحصیلی آنها است. همین طور اگر بخواهیم میزان کالری موجود در غذاهای کنسرو شده در یک کارخانه کنسرو سازی در یک روز معین را مورد بررسی قرار دهیم آنگاه ...

تمامی غذاهای کنسرو شده کارخانه در آن روز و صفت مورد مطالعه میزان کالری موجود در آنها می‌باشد.

چنانچه متذکر شدیم، مثلاً در بررسی میزان کالری موجود در غذاهای کنسرو شده، به علت هزینه زیاد، وقت گیر بودن، نداشتن امکانات کافی یا از بین رفتن برخی از محصولات تولیدی، مطالعه و بررسی کلیه محصولات تولیدی بسیار مشکل و برخی اوقات غیر ممکن است. بنابراین به جای مطالعهٔ کل محصولات تولیدی کارخانه قسمتی از آن را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و به مطالعهٔ آن می‌پردازیم.

نمونه زیر مجموعه‌ای از جمعیت که طبق یک قاعده و ضابطهٔ خاصی برای مطالعهٔ صفتی از جمعیت انتخاب می‌شود را یک نمونه گویند. تعداد اعضای نمونه به اندازهٔ نمونه موسوم است.

در بررسیهای آماری سعی می‌کنند در انتخاب نمونه دقت کافی انجام گیرد تا با بررسی چنین نمونه مناسبی نتایج حاصله از آن را بتوان با دقت زیاد برای جمعیت تعمیم داد. در هر صورت بایستی نمونه انتخاب شده یک الگوی مناسب از جمعیت باشد. برای مثال اگر بخواهیم در مورد میزان درآمد افراد ساکن در یک شهر مطالعه‌ای را انجام دهیم، بایستی نمونه ما بگونه‌ای انتخاب شود که شامل افراد با درآمد کم، متوسط و زیاد به نسبت موجود در جمعیت باشد.

داده‌ها در یک بررسی آماری، بایستی صفت مورد مطالعه را به صورت اعداد و ارقام نمایش دهیم. اگر صفت مورد مطالعه کمی، مانند وزن، حجم، درجهٔ حرارت و غیره باشد آنگاه این عمل به سادگی با اندازه‌گیری امکان‌پذیر است. اما اگر صفت مورد مطالعه کیفی، مانند گروه خون، شغل، رنگ چشم و غیره باشد آنگاه بایستی با یک قاعده معین این مسائل کیفی را با اعداد و ارقام نشان داد. در هر صورت این اعداد و ارقام را داده‌ها گویند که به دو صورت گسسته و پیوسته می‌باشند. داده‌های گسسته داده‌هایی هستند که بین دو مقدار متصور آنها هیچ عدد دیگری وجود نداشته باشد. مانند تعداد فرزندان یک خانواده که شامل مقادیر ۰، ۱، ۲ و ... است و همچنین صفت شغل افراد که به آن مثلاً اعداد ۱، ۲، ۳ و ... را نسبت می‌دهیم و بین این مقادیر عدد دیگری در رابطه با صفت مورد نظر وجود ندارد. داده‌های پیوسته داده‌هایی هستند که بین هر دو مقدار متصور آنها همواره عدد دیگری وجود دارد. مانند وزن افراد که بین دو نفر با وزنهای نزدیک به هم همواره می‌توان فردی را با وزنی بین وزن دو فرد یاد شده در جمعیت یافت. از جمله داده‌های گسسته می‌توان داده‌های

مربوط به صفات گروه خون، رنگ، نژاد، شغل، تعداد کالاهای تولیدی و غیره را برشمرد و از جمله داده‌های پیوسته می‌توان داده‌های مربوط به صفات وزن، طول قد، فشار گاز، قطر لوله تولیدی یک کارخانه و غیره را برشمرد.

در آمار بعد از جمع آوری داده‌ها به بررسی آماری بر روی آنها می‌پردازیم. در مرحله نخست با توجه به اهداف بررسی، داده‌ها را تنظیم، طبقه بندی و خلاصه می‌کنیم به طوری که بتوانیم اطلاعات مفیدی برای نیل به اهداف و نتایج مورد نظر به دست آوریم. انجام این کار در سه مرحله به شرح زیر صورت می‌پذیرد:

الف- تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول،

ب- ترسیم نمودارهای گوناگون از روی مقادیر ارائه شده در جدول،

ج- خلاصه کردن داده‌ها به یک یا چند عدد موسوم به شاخص یا آماره.

سه موضوع فوق از موضوعات اساسی بحث آمار توصیفی است که در ذیل به معرفی و بررسی آنها می‌پردازیم.

۳.۱ جدولهای آماری

نخستین گام در خلاصه کردن داده‌ها، طبقه‌بندی و تنظیم آنها در یک جدول موسوم به جدول آماری است. یک جدول آماری بایستی به نحوی تنظیم شود که بتوان از آن به راحتی اطلاعات نهفته در داده‌ها را استخراج کرد. متداول‌ترین جدول آماری جدول فراوانی است که در آن داده‌ها، تعداد موجود از هر داده و درصد موجود از هر داده مشخص می‌شود. بنابراین یک جدول فراوانی شامل موارد زیر است:

الف- فراوانی و فراوانی نسبی. فرض کنید n داده از k نوع (k طبقه) داشته باشیم و تعداد این داده‌ها در این k طبقه به ترتیب $f_1, f_2, \ldots, f_k$ باشند. به $f_1, f_2, \ldots, f_k$ فراوانی‌های طبقات و به $r_1=\frac{f_1}{n}, r_2=\frac{f_2}{n}, \ldots, r_k=\frac{f_k}{n}$ فراوانی‌های نسبی طبقات گوئیم. واضح است که

$$1 \le f_i \le n \quad , \quad 0 \le r_i \le 1 \quad , \quad \forall i=1,2,\ldots,k$$

$$f_1+f_2+\ldots+f_k=\sum_{i=1}^{k} f_i = n \quad , \quad r_1+r_2+\ldots+r_k=\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

ب- فراوانی تجمعی و فراوانی تجمعی نسبی. اگر در هر طبقه فراوانی آن طبقه ...

آن را با یکدیگر جمع کنیم فراوانی تجمعی آن طبقه به دست می‌آید و اگر در هر طبقه فراوانی نسبی آن طبقه و طبقات قبل از آن را با یکدیگر جمع کنیم فراوانی تجمعی نسبی آن طبقه حاصل می‌شود، یعنی

$$g_j = f_1 + f_2 + \dots + f_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$$ = فراوانی تجمعی طبقهٔ زام

$$s_j = r_1 + r_2 + \dots + r_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$$ = فراوانی تجمعی نسبی طبقه زام

واضح است که $g_k = n$ و $s_k = 1$

مثال ۱.۳.۱ اگر از ۱۰۰ کارمند یک اداره، ۵۰ نفر دارای حقوق کم، ۳۰ نفر دارای حقوق متوسط و ۲۰ نفر دارای حقوق زیاد باشند آنگاه فراوانی‌های سه طبقه حقوق کم، متوسط و زیاد در بین این کارمندان به ترتیب $f_1 = ۵۰$، $f_2 = ۳۰$ و $f_3 = ۲۰$ با فراوانی‌های نسبی $r_1 = ۰/۵$، $r_2 = ۰/۳$ و $r_3 = ۰/۲$ و فراوانی‌های تجمعی $g_1 = ۵۰$، $g_2 = ۸۰$ و $g_3 = ۱۰۰$ و فراوانی‌های تجمعی نسبی $s_1 = ۰/۵$، $s_2 = ۰/۸$ و $s_3 = ۱$ می‌باشد.

یک جدول فراوانی جدولی است که ستونهای آن شامل نوع داده‌ها (طبقات)، فراوانی، فراوانی نسبی، فراوانی تجمعی و فراوانی تجمعی نسبی داده‌ها باشد. در قسمتهای بعد این جدول را برای داده‌های گسسته و پیوسته به ترتیب تشکیل می‌دهیم.

۱.۳.۱ جدول فراوانی برای داده‌های گسسته

با ارائه مثالهای زیر نحوهٔ تشکیل جدول فراوانی را برای داده‌های گسسته بیان می‌کنیم.

مثال ۲.۳.۱ صنعتگری چهار نوع قطعه A، B، C و D تولید می‌کند. اگر او در یک روز ۲۰ قطعه از این قطعات را به شرح زیر تولید کرده باشد

B, C, C, A, D, C, C, B, D, C, A, C, D, C, B, C, C, B, D, D

یک جدول فراوانی برای این قطعات تشکیل دهید.

حل ابتدا چهار نوع قطعه A، B، C و D را به ترتیب با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ متناظر می‌کنیم. این اعداد تنها برای نامگذاری این قطعات است و نمی‌توان روی آنها چهار عمل اصلی حساب را انجام داد.

سپس بوسیلهٔ شمارش، فراوانی هر قطعه را محاسبه کرده و با محاسبهٔ فراوانی نسبی، فراوانی تجمعی و فراوانی تجمعی نسبی، جدول فراوانی به صورت جدول ۱.۱ را به دست می آوریم.

نوع قطعه	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
A	۱	۲	۰/۱	۲	۰/۱
B	۲	۴	۰/۲	۶	۰/۳
C	۳	۹	۰/۴۵	۱۵	۰/۷۵
D	۴	۵	۰/۲۵	۲۰	۱
جمع		۲۰	۱/۰		

جدول ۱.۱ جدول فراوانی ۲۰ قطعهٔ تولیدی صنعتگر در یک روز

از این جدول اطلاعات زیادی را می توان استخراج کرد. برای مثال عدد ۰/۲ در ستون فراوانی نسبی به معنای آن است که ۲۰٪ از قطعات تولیدی آن روز از نوع B می باشند و عدد ۰/۳ در ستون فراوانی تجمعی نسبی به معنای آن است که ۳۰٪ از قطعات تولیدی آن روز از نوع A یا B می باشند.

مثال ۳.۳.۱ تعداد قرص‌های سرماخوردگی که در ۵۰ خانواده در عرض یک ماه زمستان مصرف می‌شود عبارت‌اند از

۷, ۵, ۳, ۳, ۴, ۵, ۳, ۲, ۸, ۳, ۳, ۲, ۴, ۲, ۳, ۶, ۸, ۶, ۷, ۴, ۵, ۴, ۶, ۴, ۵

۲, ۳, ۴, ۲, ۷, ۳, ۵, ۴, ۶, ۲, ۲, ۳, ۴, ۵, ۴, ۸, ۴, ۳, ۲, ۲, ۶, ۴, ۵, ۷, ۸

یک جدول فراوانی برای این داده‌ها تشکیل دهید. چند درصد خانواده‌ها بیش از ۴ قرص در ماه مصرف می‌کنند؟

حل داده‌ها از طریق شمارش تعداد قرصهای سرماخوردگی مصرف شده بوسیلهٔ اعداد ۲، ۳، ... و ۸ به دست آمده‌اند و روی آنها می توان چهار عمل اصلی حساب را انجام داد. همانند مثال قبل جدول فراوانی برای این داده‌ها را به صورت جدول ۲.۱ تشکیل می‌دهیم.

با توجه به عدد ۰/۶۰ در ستون فراوانی تجمعی نسبی، ۶۰٪ از خانواده‌ها حداکثر ۴ قرص در ماه مصرف می‌کنند و بنابراین ۴۰٪ از خانواده‌ها بیش از ۴ قرص در ماه مصرف می‌کنند.

x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۲	۸	۰/۱۶	۸	۰/۱۶
۳	۱۰	۰/۲۰	۱۸	۰/۳۶
۴	۱۲	۰/۲۴	۳۰	۰/۶۰
۵	۷	۰/۱۴	۳۷	۰/۷۴
۶	۵	۰/۱۰	۴۲	۰/۸۴
۷	۴	۰/۰۸	۴۶	۰/۹۲
۸	۴	۰/۰۸	۵۰	۱/۰۰
جمع	۵۰	۱/۰۰		

جدول ۲.۱ جدول فراوانی قرصهای سرماخوردگی مصرف شده ۵۰ خانواده در یک ماه

۲.۳.۱ جدول فراوانی برای داده‌های پیوسته

با ارائه مثالهای زیر نحوهٔ تشکیل جدول فراوانی برای داده‌های پیوسته را بیان می‌کنیم.

مثال ۴.۳.۱ وزنهای ۴۰ قالب کره که به نزدیکترین عدد صحیح گرد شده‌اند به قرار زیر است

۵۲	۳۵	۲۲	۴۷	۳۶	۵۱	۳۲	۳۸	۲۶	۳۳
۴۷	۳۶	۳۸	۵۰	۴۷	۳۲	۲۱	۴۰	۴۲	۲۰
۲۶	۲۹	۳۰	۳۲	۳۰	۳۵	۳۷	۳۷	۴۱	۲۱
۳۱	۳۰	۲۶	۳۵	۴۵	۲۳	۲۳	۳۱	۳۴	۴۳

یک جدول فراوانی برای این داده‌ها تشکیل دهید.

حل داده‌ها از نوع پیوسته می‌باشند. در این حالت داده‌ها را به تعدادی رده (فاصله) با طول مساوی تقسیم کرده و در هر رده فراوانی داده‌ها را می‌شماریم. روش به دست آوردن تعداد رده‌ها و طول هر رده به ترتیب در زیر آورده شده است.

۱- برای به دست آوردن تعداد رده‌ها یک قاعدهٔ عمومی وجود ندارد و معمولاً تعداد رده‌ها را بین ۵ تا ۲۵ رده اختیار می‌کنند. یک قاعدهٔ مفید استفاده از دستور استورگس (Sturges) است که در آن تعداد رده k از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$k = 1 + 3/322 \log_{10}^{n}$$

که در آن n تعداد کل داده‌هاست. چون حاصل این عدد اعشاری است آن را به عدد صحیح بزرگتر از آن گرد می‌کنند. بنابراین در این مثال داریم که

$$k = 1 + 3/322 \log_{10}^{20} = 6/322 \simeq 7$$

۲- با توجه به اینکه وزنها به نزدیکترین عدد صحیح گرد شده‌اند بنابراین عدد ۳۵ در داده‌ها در واقع عددی در فاصلهٔ (۳۴/۵-۳۵/۵) می‌باشد. عدد ۰/۵ را میزان تغییر پذیری مقادیر داده‌ها نامیده و به صورت زیر آن را محاسبه می‌کنیم

$$\text{میزان تغییر پذیری داده‌ها} = S = \frac{\text{واحد گرد شدهٔ داده‌ها}}{2} = \frac{1}{2} = 0/5$$

۳- کوچکترین، بزرگترین و دامنهٔ واقعی داده‌ها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\min = \text{کوچکترین داده} - S = 21 - 0/5 = 20/5$$

$$\max = \text{بزرگترین داده} + S = 52 + 0/5 = 52/5$$

$$\text{دامنه} = R = \max - \min = 52/5 - 20/5 = 32$$

۴- طول هر رده را از تقسیم دامنهٔ R بر تعداد رده k به دست می‌آوریم و عدد حاصل را که ممکن است دارای چند رقم اعشار باشد مطابق واحد گرد شدهٔ داده‌ها به عدد بالاتر گرد می‌کنیم. بنابراین

$$\text{طول رده} = w = \frac{R}{k} = \frac{32}{7} = 4/5714 \approx 5$$

چون داده‌ها به عدد صحیح گرد شده‌اند و اولین عدد صحیح بزرگتر از ۴/۵۷۱۴ عدد ۵ می‌باشد پس طول رده به ۵ گرد شده است.

حال بایستی ۷ رده هر یک به طول ۵ را تشکیل دهیم. برای این منظور در جدول فراوانی یک ستون به نام رده‌ها ایجاد می‌کنیم و در آن اولین رده به طول ۵ را به صورت ۲۰/۵-۲۵/۵ (با شروع از min با طول w) در نظر گرفته و ردهٔ بعدی را به صورت ۲۵/۵-۳۰/۵ (شروع از انتهای ردهٔ قبل با طول w) در نظر می‌گیریم و این عمل را تا تشکیل ۷ رده ادامه می‌دهیم. برای شمارش فراوانی هر طبقه در جدول فراوانی از ستونی به نام خط و نشان استفاده می‌کنیم که در این ستون با خط زدن هر داده و مشخص کردن مکان آن در طبقهٔ مربوطه بوسیلهٔ یک...

طبقات مشخص می‌گردند. توجه کنید که اگر بوسیلهٔ انجام مراحل فوق آخرین رده دارای فراوانی صفر باشد، آن ردهٔ آخر را حذف می‌کنیم. در جدول فراوانی داده‌های پیوسته نقاط وسط رده‌ها را با x_i نمایش می‌دهیم و آن را نمایندهٔ رده می‌نامیم. با انجام عملیات گفته شده در بالا جدول فراوانی مربوط به وزن قالبهای کره به صورت جدول ۳.۱ به دست می‌آید

رده‌ها	خط و نشان	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۲۰/۵-۲۵/۵	𝍷𝍷𝍷	۲۳	۳	۰/۰۷۵	۳	۰/۰۷۵
۲۵/۵-۳۰/۵	𝍸 𝍷	۲۸	۶	۰/۱۵	۹	۰/۲۲۵
۳۰/۵-۳۵/۵	𝍸 𝍸	۳۳	۱۰	۰/۲۵	۱۹	۰/۴۷۵
۳۵/۵-۴۰/۵	𝍸 𝍷𝍷𝍷	۳۸	۸	۰/۲۰	۲۷	۰/۶۷۵
۴۰/۵-۴۵/۵	𝍸 𝍷	۴۳	۶	۰/۱۵	۳۳	۰/۸۲۵
۴۵/۵-۵۰/۵	𝍸	۴۸	۵	۰/۱۲۵	۳۸	۰/۹۵
۵۰/۵-۵۵/۵	𝍷𝍷	۵۳	۲	۰/۰۵	۴۰	۱/۰۰
جمع			۴۰	۱/۰۰		

جدول ۳.۱ جدول فراوانی وزنهای ۴۰ قالب کره

با استفاده از این جدول مشخص می‌شود که ۲۵٪ از قالبهای کره دارای وزنی بین ۳۰/۵-۳۵/۵ می‌باشند و ۴۷/۵٪ از قالبهای کره دارای وزنی کمتر از ۳۵/۵ می‌باشند.(چرا؟)

مثال ۵.۳.۱ داده‌های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخهای کتان می‌باشد

۲۱/۲	۲۸/۳	۲۷/۱	۲۵/۰	۳۲/۷	۲۹/۵	۳۰/۲	۲۳/۹	۲۳/۰	۲۶/۴
۲۷/۳	۳۳/۷	۲۹/۴	۲۱/۹	۲۹/۳	۱۷/۳	۲۹/۰	۳۶/۸	۲۹/۲	۲۳/۵
۲۰/۶	۲۹/۵	۲۱/۸	۳۷/۵	۳۳/۵	۲۹/۶	۲۶/۸	۲۸/۷	۳۴/۸	۱۸/۶
۲۵/۴	۳۴/۱	۲۷/۵	۲۹/۶	۲۲/۲	۲۲/۷	۳۱/۳	۳۳/۲	۳۷/۰	۲۸/۳
۳۶/۹	۲۴/۶	۲۸/۹	۲۴/۸	۲۸/۱	۲۵/۴	۳۴/۵	۲۳/۶	۳۸/۴	۲۴/۰

یک جدول فراوانی برای این داده‌ها تشکیل دهید.

حل با توجه به روش گفته شده در مثال ۴.۳.۱، محاسبات زیر را برای این مثال انجام می‌دهیم

$$k=۱+۳/۳۲۲\log_{۱۰}^{۵۰}=۶/۶۴۴\approx ۷$$

$S=\frac{۰/۱}{۲}=۰/۰۵$

$min=۱۷/۳-۰/۰۵=۱۷/۲۵$

$max=۳۸/۴+۰/۰۵=۳۸/۴۵$

$R=۳۸/۴۵-۱۷/۲۵=۲۱/۲$

$w=\frac{۲۱/۲}{۷}=۳/۰۲۸۶\approx۳/۱$

بنابراین بایستی ۷ رده هر یک به طول ۳/۱ را تشکیل دهیم. جدول فراوانی حاصل در جدول ۴.۱ آورده شده است.

ردهها	خط و نشان	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۱۷/۲۵-۲۰/۳۵	||	۱۸/۸	۲	۰/۰۴	۲	۰/۰۴
۲۰/۳۵-۲۳/۴۵	卌 ||	۲۱/۹	۷	۰/۱۴	۹	۰/۱۸
۲۳/۴۵-۲۶/۵۵	卌 卌	۲۵/۰	۱۰	۰/۲۰	۱۹	۰/۳۸
۲۶/۵۵-۲۹/۶۵	卌 卌 卌 ||	۲۸/۱	۱۷	۰/۳۴	۳۶	۰/۷۲
۲۹/۶۵-۳۲/۷۵	|||	۳۱/۲	۳	۰/۰۶	۳۹	۰/۷۸
۳۲/۷۵-۳۵/۸۵	卌 |	۳۴/۳	۶	۰/۱۲	۴۵	۰/۹۰
۳۵/۸۵-۳۸/۹۵	卌	۳۷/۴	۵	۰/۱۰	۵۰	۱/۰۰
جمع			۵۰	۱/۰۰		

جدول ۴.۱ جدول فراوانی اندازهٔ نیروی پارگی ۵۰ نخ کتان

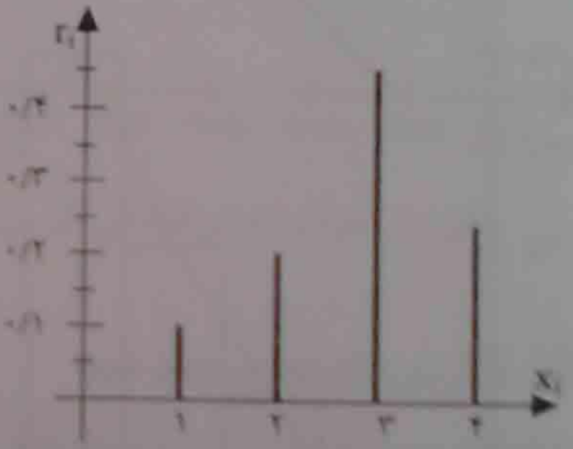
۴.۱ نمودارهای آماری

دومین گام در خلاصه کردن دادهها تبدیل جدول فراوانی به نمودارهایی است که بوسیلهٔ این نمودارها بتوان اطلاعات نهفته در دادهها و جدول فراوانی را تا حدودی به طور عینی و بدون توضیح و تشریح اضافی دید. نمودارهای مختلف و گوناگونی در آمار وجود دارند که در این قسمت بعضی از آنها را برای دادههای گسسته و پیوسته می‌آوریم.

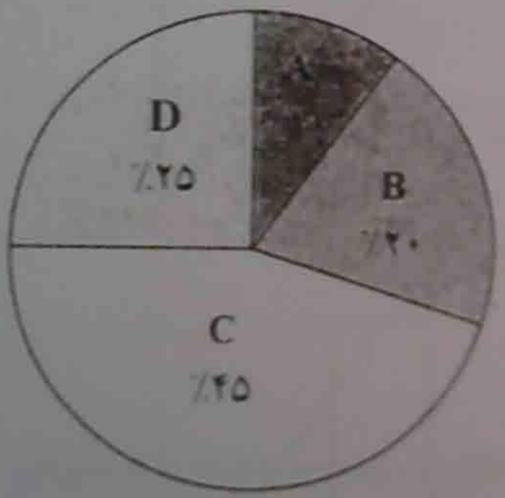
۱.۴.۱ نمودارهای آماری برای داده‌های گسسته

برای داده‌های گسسته دو نوع نمودار میله‌ای و دایره‌ای را در زیر معرفی می‌کنیم.

الف- نمودار میله‌ای در این نمودار دو محور عمود بر هم در نظر می‌گیریم و بر روی محور افقی مقادیر x_iها و بر روی محور عمودی مقادیر فراوانی نسبی r_iها را نمایش می‌دهیم. سپس در هر مقدار x_i میله‌ای به ارتفاع فراوانی نسبی r_i مربوط به آن طبقه رسم می‌کنیم. نمودار حاصله را نمودار میله‌ای داده‌ها گویند. برای مثال در شکل ۱.۱ نمودار میله‌ای داده‌های مثال ۲.۳.۱ رسم شده است. در این نمودار علاوه بر مشاهدهٔ اطلاعات جدول فراوانی، می‌توان مقایسه‌ای بین طبقات مختلف انجام داد.



شکل ۱.۱ نمودار میله‌ای مربوط به ۲۰ قطعه تولیدی یک صنعتگر در یک روز



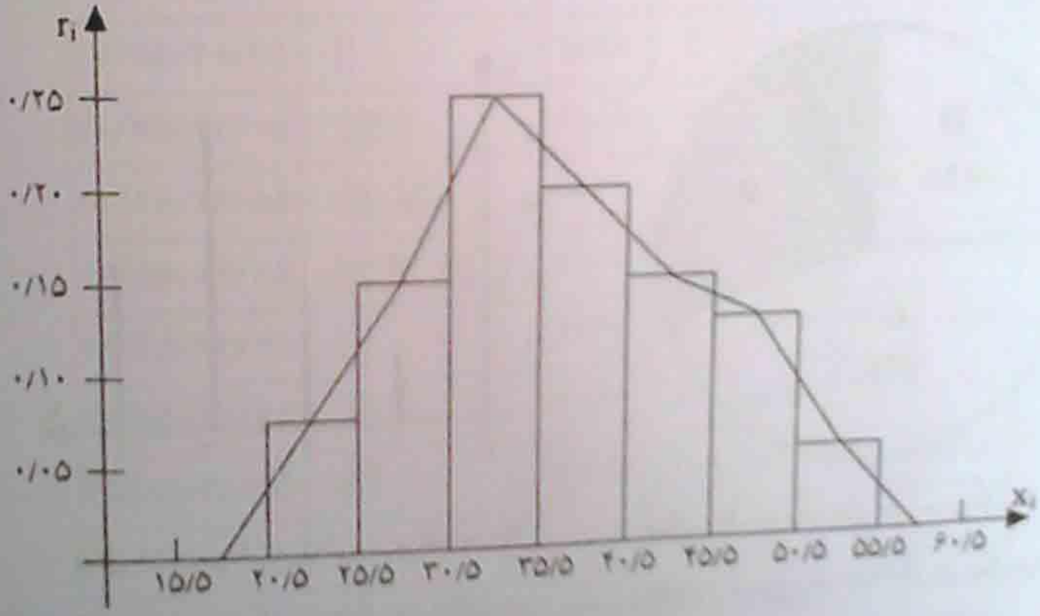
شکل ۲.۱ نمودار دایره‌ای مربوط به ۲۰ قطعهٔ تولیدی یک صنعتگر در یک روز

ب- نمودار دایره‌ای در این نمودار دایره‌ای را رسم کرده و این دایره را به تعداد طبقات جدول فراوانی به قطاعهایی تقسیم می‌کنیم، به طوری که اندازهٔ هر قطاع متناسب با فراوانی نسبی طبقهٔ مربوطه باشد. برای مثال، در مثال ۲.۳.۱ طبقهٔ دوم (قطعهٔ نوع B) دارای فراوانی نسبی ۰/۲ می‌باشد و برای این طبقه یک قطاع به اندازهٔ $۰/۲ \times ۳۶۰^\circ = ۷۲^\circ$ را در دایره در نظر می‌گیریم و این عمل را برای طبقات دیگر نیز تکرار می‌کنیم. شکل ۲.۱ نمودار دایره‌ای داده‌های مثال ۲.۳.۱ را نشان می‌دهد.

۲.۴.۱ نمودارهای آماری برای داده‌های پیوسته

برای داده‌های پیوسته سه نمودار را در زیر معرفی می‌کنیم

الف- هیستوگرام (نمودار ستونی) هیستوگرام نموداری متشکل از تعدادی مستطیل است که تعداد این مستطیل‌ها برابر تعداد رده‌های جدول فراوانی می‌باشد. قاعده هر مستطیل روی محور افقی قرار دارد و طول آن برابر طول واقعی رده است، که هر چه باشد آن را یک واحد در نظر می‌گیریم و مرکز آن نمایندهٔ رده است. ارتفاع هر مستطیل برابر فراوانی نسبی مربوط به آن رده است. برای مثال هیستوگرام مربوط به مثال ۴.۳.۱ در شکل ۳.۱ رسم شده است. توجه کنید که چون عرض هر مستطیل برابر یک واحد در نظر گرفته شده و ارتفاع هر مستطیل برابر فراوانی نسبی ردهٔ مربوطه می‌باشد پس مجموع مساحت تمام مستطیل‌های هیستوگرام برابر یک واحد مربع است.

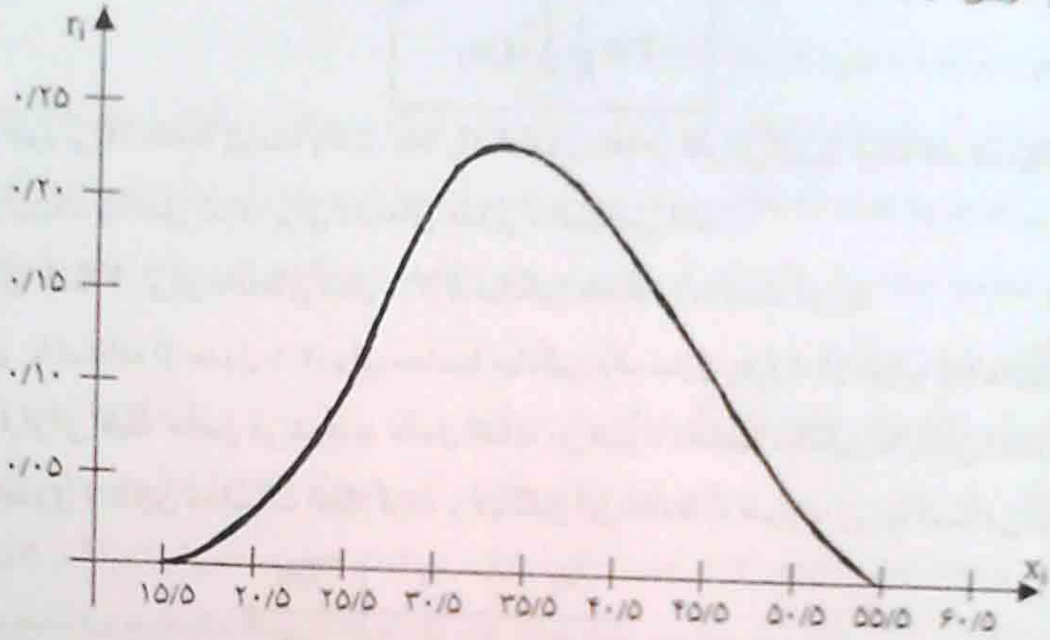


شکل ۳.۱ نمودار هیستوگرام و چندبر فراوانی مربوط به وزنهای ۲۰ قالب کره

ب- چندبر فراوانی اگر وسط قاعده‌های بالای مستطیل‌های هیستوگرام را بوسیلهٔ خطوط مستقیم به طور متوالی به یکدیگر وصل کرده و ابتدای آن را به وسط ردهٔ ماقبل و انتهای آن را به وسط ردهٔ مابعد مستطیل‌های هیستوگرام وصل کنیم یک چند ضلعی بوجود می‌آید که آن را چندبر فراوانی گویند و مساحت زیر این چندبر فراوانی نیز یک واحد مربع است. در شکل ۳.۱ چندبر فراوانی مربوط به مثال ۴.۳.۱ نمایش داده شده است.

ج- منحنی فراوانی اگر تعداد داده‌ها زیاد و طول رده‌ها کوچک باشند در این صورت تعداد رده‌ها زیاد شده و در نتیجه تعداد اضلاع چندبر فراوانی نیز زیاد می‌شود و به یک منحنی ...

مساحت زیر این منحنی یک واحد مربع است و به آن منحنی فراوانی گویند. در شکل ۴.۱ منحنی فراوانی تقریبی مربوط به داده‌های مثال ۴.۳.۱ رسم شده است.



شکل ۴.۱ نمودار منحنی فراوانی تقریبی مربوط به وزنهای ۴۰ قالب کره

۵.۱ خلاصه کردن داده‌ها در چند عدد

با تشکیل جدول فراوانی و رسم نمودارها می‌توان اطلاعات نهفته در داده‌ها را تا حدودی مشخص کرد. با این حال برای اینکه بتوانیم نتایج کلی دربارهٔ صفت مورد مطالعه به دست آورده و این نتایج را به سادگی گزارش کنیم، بهتر است که داده‌ها را در یک یا چند عدد خلاصه کنیم. چنین اعدادی را شاخص یا معیار گویند و به دو نوع، شاخص‌های تمرکز و شاخص‌های پراکندگی، موسوم‌اند. در این بخش این نوع شاخص‌ها را معرفی می‌کنیم.

۱.۵.۱ شاخص‌های تمرکز

شاخص‌های تمرکز مقادیری هستند که معمولاً در حوالی مرکز منحنی فراوانی قرار گرفته‌اند. مهمترین شاخص‌های تمرکز میانگین، میانه و نما می‌باشند که در این قسمت به شرح آنها می‌پردازیم.

الف- میانگین فرض کنید داده‌های x_1، x_2، ... و x_k به ترتیب دارای فراوانیهای f_1، f_2، ... و

f_k باشند و تعداد کل این داده‌ها برابر n باشد. مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها را میانگین (حسابی) این داده‌ها گویند، یعنی

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

در صورتی که داده‌ها پیوسته باشند، x_iها را نمایندهٔ رده‌ها در نظر می‌گیریم. توجه کنید که میانگین به عنوان یک شاخص تمرکز برای داده‌های عددی مناسب می‌باشد.

مثال ۱.۵.۱ برای داده‌های مثال ۳.۳.۱، میانگین داده‌ها را به دست آورید.

حل با استفاده از جدول ۲.۱، برای محاسبهٔ میانگین یک ستون $f_i x_i$ که از ضرب x_i (نماینده رده) در فراوانی طبقه حاصل می‌شود، به جدول اضافه می‌کنیم تا محاسبهٔ میانگین به راحتی انجام گیرد. در جدول ۵.۱ این محاسبات انجام گرفته و میانگین این داده‌ها به صورت زیر به دست می‌آید

x_i	f_i	$f_i x_i$
۲	۸	۱۶
۳	۱۰	۳۰
۴	۱۲	۴۸
۵	۷	۳۵
۶	۵	۳۰
۷	۴	۲۸
۸	۴	۳۲
جمع	۵۰	۲۱۹

جدول ۵.۱ جدول محاسبه میانگین

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i=۲۱۹ \Rightarrow \bar{x}=\frac{۲۱۹}{۵۰}=۴/۳۸$$

یعنی هر خانواده به طور متوسط ۴/۳۸ قرص در ماه مصرف می‌کند.

مثال ۲.۵.۱ برای داده‌های مثال ۴.۳.۱، میانگین داده‌ها را به دست آورید.

حل با استفاده از جدول ۳.۱ و در نظر گرفتن x_i به عنوان نمایندهٔ رده در فرمول میانگین و تشکیل یک جدول همانند جدول ۵.۱ به سادگی دیده می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = ۱۴۷۵ \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{۱۴۷۵}{۴۰} = ۳۶/۸۷۵$$

یعنی هر قالب کره به طور متوسط ۳۶/۸۷۵ وزن دارد.

ب- میانه اگر داده‌ها را به طور غیر نزولی مرتب کنیم آنگاه عدد m را میانهٔ این داده‌ها گویند در صورتی که تقریباً نصف داده‌ها در سمت چپ و نصف داده‌ها در سمت راست این عدد قرار گیرند. روش محاسبهٔ میانه برای داده‌های گسسته و پیوسته متفاوت می‌باشد و در زیر هر یک را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

محاسبهٔ میانه برای داده‌های گسسته فرض کنید $x_{(1)}$، $x_{(2)}$، ... و $x_{(n)}$ شکل مرتب شده داده‌های x_1، x_2، ... و x_n به طور غیر نزولی باشند. اگر تعداد داده‌ها n فرد باشد آنگاه $m=x_{(\frac{n+1}{2})}$، یعنی داده‌ای که در وسط قرار دارد میانه محسوب می‌شود و اگر n زوج باشد، آنگاه $m=\frac{x_{(\frac{n}{2})}+x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$، یعنی نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار دارند میانه محسوب می‌شود.

مثال ۳.۵.۱ میانه را برای داده‌های ۱۵, ۱۹, ۱۷, ۲۱, ۲۱, ۱۹, ۱۷, ۱۲, ۲۵, ۱۸, ۱۲ به دست آورید.

حل ابتدا داده‌ها را به طور غیرنزولی مرتب می‌کنیم یعنی ۲۵, ۲۱, ۲۱, ۱۹, ۱۹, ۱۸, ۱۷, ۱۷, ۱۵, ۱۲, ۱۲. چون تعداد داده‌ها ۱۱=n فرد می‌باشد بنابراین ۱۸ $= m = x_{(۶)}$

مثال ۴.۵.۱ میانه را برای داده‌های ۵, ۷, ۳, ۳, ۲, ۱۱, ۹, ۸, ۱۲, ۲ به دست آورید.

حل داده‌های مرتب شده عبارت‌اند از ۱۲, ۱۱, ۹, ۸, ۷, ۵, ۳, ۳, ۲, ۲. چون تعداد داده‌ها ۱۰=n زوج می‌باشد بنابراین ۶ $= \frac{۵+۷}{۲} = \frac{x_{(۵)}+x_{(۶)}}{۲} = m$

مثال ۵.۵.۱ میانه را برای داده‌های مثال ۳.۳.۱ به دست آورید.

حل چون تعداد داده‌ها ۵۰=n زوج می‌باشد بنابراین با توجه به ستون فراوانی جدول ۲.۱ داریم که

$$m = \frac{x_{(۲۵)}+x_{(۲۶)}}{۲} = \frac{۴+۴}{۲} = ۴$$

یعنی تقریباً نیمی از خانواده‌ها حداکثر ۴ قرص و نیمی از خانواده‌ها حداقل ۴ قرص در ماه مصرف می‌کنند.

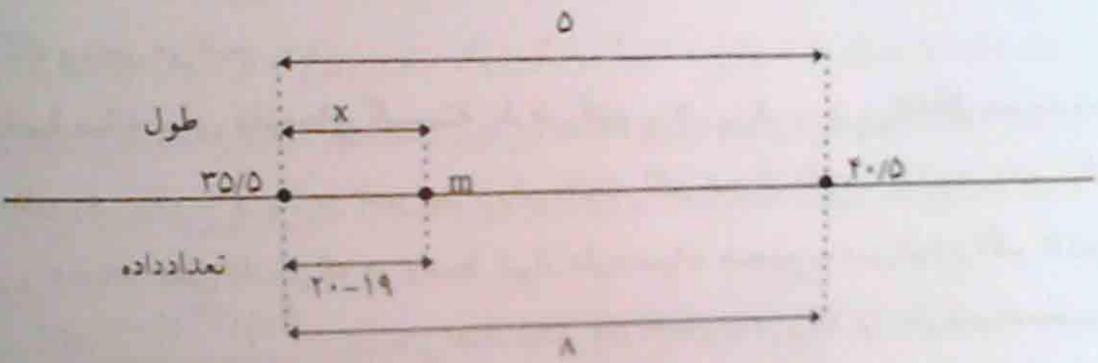
محاسبهٔ میانه برای داده‌های پیوسته روش به دست آوردن میانه برای داده‌های پیوسته را

ابتدا با یک مثال شرح می‌دهیم و سپس یک رابطهٔ کلی برای محاسبهٔ میانه ارائه می‌دهیم.

مثال ۶.۵.۱ میانه را برای داده‌های مثال ۴.۳.۱ به دست آورید.

حل برای پیدا کردن میانه برای این داده‌ها با استفاده از جدول ۳.۱ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱- ابتدا در جدول فراوانی نخستین رده‌ای که فراوانی تجمعی نسبی آن بزرگتر یا مساوی ۰/۵۰، باشد را در نظر می‌گیریم. این رده که میانه درون آن قرار دارد را ردهٔ میانه می‌نامیم. در این مثال ردهٔ میانه ۴۰/۵-۳۵/۵ می‌باشد.



شکل ۵.۱ محاسبه میانه برای داده‌های پیوسته

۲- فرض می‌کنیم که در ردهٔ میانه داده‌ها در فواصل مساوی توزیع شده‌اند در این صورت با توجه به شکل ۵.۱ می‌توان تناسب زیر را تشکیل داد.

طول	تعداد رده
۵	۸
$x=\frac{(۲۰-۱۹)۵}{۸}=۰/۶۲۵$	۲۰-۱۹

بنابراین با توجه به شکل ۵.۱ میانه به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$m = \text{کران پائین ردهٔ میانه} + x = ۳۵/۵+\frac{(۲۰-۱۹)۵}{۸} = ۳۵/۵+۰/۶۲۵ = ۳۶/۱۲۵$$

با توجه به عملیات انجام شده در مثال ۶.۵.۱ می‌توان فرمول زیر را برای محاسبهٔ میانه ارائه داد.

$$m=L_{۰/۵}+\frac{(۰/۵n-g_{۰/۵})w}{f_{۰/۵}}$$

در این فرمول $L_{۰/۵}$ کران پائین ردهٔ میانه، n تعداد داده‌ها، $g_{۰/۵}$ فراوانی تجمعی ردهٔ قبل از ردهٔ میانه، $f_{۰/۵}$ فراوانی ردهٔ میانه و w طول رده می‌باشد.

مثال ۷.۵.۱ در مثال ۵.۳.۱ میانهٔ داده‌ها را محاسبه کنید.

حل با توجه به جدول ۴.۱ ردهٔ میانه ۲۹/۶۵-۲۶/۵۵ می‌باشد و عملیات مربوط به میانه عبارت‌اند از

$$L_{۰/۵}=۲۶/۵۵\ ,\ n=۵۰\ ,\ g_{۰/۵}=۱۹\ ,\ f_{۰/۵}=۱۷\ ,\ w=۳/۱$$

بنابراین
$$m=۲۶/۵۵+\frac{(۰/۵\times ۵۰-۱۹)۳/۱}{۱۷}=۲۶/۵۵+۱/۰۹۴=۲۷/۶۴۴$$

توجه کنید که میانه تحت تأثیر داده‌های بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک قرار نمی‌گیرد، در حالیکه میانگین شدیداً تحت تأثیر چنین داده‌هایی قرار می‌گیرد.

ج- نما داده‌ای که فراوانی آن از سایر داده‌ها بیشتر باشد را نما یا مد نامیده و با نماد M نمایش می‌دهیم. همانند میانه روش محاسبهٔ نما برای داده‌های گسسته و پیوسته متفاوت می‌باشد که در زیر هر یک را جداگانه شرح می‌دهیم.

محاسبه نما برای داده‌های گسسته در این حالت ابتدا فراوانی داده‌ها را پیدا می‌کنیم و داده‌ای که فراوانی آن بیشتر باشد را به عنوان نما اختیار می‌کنیم. اگر دو دادهٔ غیر مجاور دارای فراوانی یکسان و بیش از سایر فراوانی‌ها باشند، هر دو را به عنوان نما اختیار کرده و داده‌ها را دو نمایی گوئیم و اگر این دو داده مجاور یکدیگر باشند نصف مجموع آنهارا به عنوان نما اختیار می‌کنیم. اگر تمام داده‌ها دارای فراوانی یکسان باشند گوئیم که داده‌ها بدون نما هستند.

مثال ۸.۵.۱ برای داده‌های ۲،۸،۳،۷،۳،۹،۲،۳،۷،۹،۳،۷ چون فراوانی داده ۳ از سایر داده‌ها بیشتر است پس نما برابر است با $M=۳$.

مثال ۹.۵.۱ برای داده‌های ۵،۶،۷،۳،۷،۹،۶،۵،۷،۵ چون فراوانی دو دادهٔ غیر مجاور ۵و۷ از سایر داده‌ها بیشتر است پس داده‌ها دو نمایی هستند و $M_۱=۵$ و $M_۲=۷$.

مثال ۱۰.۵.۱ برای داده‌های ۳،۸،۲،۵،۳،۶،۵،۸،۳،۲،۵ چون فراوانی دو دادهٔ مجاور ۳و۵ از سایر داده‌ها بیشتر است پس نما برابر است با $M=\frac{۳+۵}{۲}=۴$.

مثال ۱۱.۵.۱ برای داده‌های ۳،۶،۷،۴،۷،۶،۳،۴ چون فراوانی همهٔ داده‌ها یکسان است پس داده‌ها بدون نما هستند.

توجه کنید که نما می‌تواند به عنوان معیار تمرکز داده‌های گسسته که از یک متغیر کیفی حاصل شده‌اند مورد استفاده قرار گیرد.

مثال ۱۲.۵.۱ برای داده‌های مثال ۲.۳.۱ با توجه به جدول ۸.۱، قطعهٔ نوع C فراوانی بیشتری نسبت به سایر قطعات دارد و بنابراین نما برابر M=۳ و یا قطعه نوع C می‌باشد.

محاسبهٔ نما برای داده‌های پیوسته در این حالت داده‌ها را در یک جدول فراوانی مرتب می‌کنیم و رده‌ای که فروانی آن از سایر رده‌ها بیشتر است را به عنوان ردهٔ نمایی اختیار می‌کنیم حال می‌توان نمایندهٔ این رده یعنی x_i را به عنوان نما اختیار کرد و یا اگر بخواهیم نما را به طور دقیق‌تر در این رده محاسبه کنیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$M = L_M + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2}\right) w$$

در این فرمول L_M کران پائین ردهٔ نمایی، D_1 اختلاف فراوانی‌های نسبی ردهٔ نمایی و ردهٔ قبل از آن، D_2 اختلاف فراوانی‌های نسبی ردهٔ نمایی و ردهٔ بعد از آن و w طول رده می‌باشد.

مثال ۱۳.۵.۱ در مثال ۴.۳.۱ نمای داده‌ها را محاسبه کنید.

حل با توجه به جدول ۳.۱ ردهٔ نمایی ۳۰/۵-۳۵/۵ می‌باشد و بنابراین محاسبات برای یافتن نما عبارت‌اند از

$$L_M = ۳۰/۵ \ , \ D_1 = ۰/۲۵ - ۰/۱۵ = ۰/۱۰ \ , \ D_2 = ۰/۲۵ - ۰/۲۰ = ۰/۰۵ \ , \ w = ۵$$

بنابراین

$$M = ۳۰/۵ + \left(\frac{۰/۱۰}{۰/۱۰ + ۰/۰۵}\right)۵ = ۳۰/۵ + ۳/۳۳۳ = ۳۳/۸۳۳$$

مثال ۱۴.۵.۱ در مثال ۵.۳.۱ نمای داده‌ها را محاسبه کنید.

حل با توجه به جدول ۴.۱ ردهٔ نمایی ۲۶/۵۵-۲۹/۶۵ می‌باشد و بنابراین محاسبات برای یافتن نما عبارت‌اند از

$$L_M = ۲۶/۵۵ \ , \ D_1 = ۰/۳۴ - ۰/۲۰ = ۰/۱۴ \ , \ D_2 = ۰/۳۴ - ۰/۰۶ = ۰/۲۸ \ , \ w = ۳/۱$$

بنابراین

$$M = ۲۶/۵۵ + \left(\frac{۰/۱۴}{۰/۱۴ + ۰/۲۸}\right)۳/۱ = ۲۶/۵۵ + ۱/۰۳۳ = ۲۷/۵۸۳$$

۲.۵.۱ شاخص‌های پراکندگی

بوسیلهٔ شاخص‌های تمرکز می‌توان میزان تمرکز داده‌ها را در یک عدد خلاصه کرد. اما یک مسئله مهم در ارتباط با داده‌های آماری، میزان تغییرات و پراکندگی آنها است، بدین معنی که اندازه‌گیری تا چه اندازه از فردی به فرد دیگر تغییر می‌کند. در این قسمت شاخص‌های پراکندگی را به عنوان معیاری برای سنجش میزان تغییرات داده‌ها معرفی می‌کنیم. ابتدا به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۵.۵.۱ نمرات ۱۰ دانش آموز در دو امتحان تستی درسهای ریاضی و زبان به صورت زیر است:

درس ریاضی : ۰,۴,۴,۱۲,۱۲,۱۲,۱۴,۱۶,۱۶,۲۰

درس زبان : ۸,۸,۹,۹,۱۲,۱۲,۱۲,۱۳,۱۳,۱۴

همان طور که دیده می‌شود در هر دو کلاس میانگین نمره $\bar{x}=11$ میانه $m=12$ و نما $M=12$ می‌باشد، اما نحوهٔ تغییر پذیری نمرات در دو درس نسبت به میانگین ۱۱ یا میانه و نمای ۱۲ متفاوت می‌باشد. در درس ریاضی پراکندگی نمرات زیاد ولی در درس زبان پراکندگی نمرات کمتر است.

با توجه به مثال بالا برای اینکه بتوانیم این دو درس را با یکدیگر مقایسه کنیم بایستی از شاخص‌های دیگری بنام شاخص‌های پراکندگی استفاده کنیم که در زیر مهمترین این شاخص‌ها را معرفی می‌کنیم.

الف- دامنهٔ داده‌ها اگر $x_{(1)}$ کوچکترین داده و $x_{(n)}$ بزرگترین داده باشد آنگاه

$$R=x_{(n)}-x_{(1)}$$

را دامنهٔ داده‌ها گویند. برای مثال در مثال ۱۵.۵.۱ دامنهٔ نمرات دروس ریاضی و زبان به ترتیب $R_1=20-0=20$ و $R_2=14-8=6$ می‌باشد که نشان می‌دهد نمرات درس زبان دارای پراکندگی کمتری است.

با وجود اینکه این شاخص وسعت پراکندگی داده‌ها را معرفی می‌کند اما یک شاخص مناسب و کافی برای سنجش تغییر پذیری داده‌ها نیست زیرا تنها به کوچکترین و بزرگترین داده وابسته است.

ب- میانگین انحرافات اختلاف مثبت داده x_i از میانگین یعنی $|x_i-\bar{x}|$ را انحراف از میانگین داده x_i گویند و میانگین تمام انحرافات یعنی $D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i|x_i-\bar{x}|$ را میانگین

انحرافات گویند. میانگین انحرافات یک شاخص مناسب برای سنجش تغییر پذیری داده‌ها است، زیرا به تمامی داده‌ها و انحرافات آنها وابسته است. اما روش محاسبهٔ آن مشکل می باشد و به دلیل وجود قدر مطلق در فرمول آن، نمی توان آن را ساده کرد تا محاسبات آن ساده شوند و به جای آن از شاخص مناسب زیر استفاده می‌کنیم.

ج- واریانس و انحراف استاندارد میانگین مجذور انحرافات را واریانس می‌نامند و با نماد S_b^2 نمایش می دهند، یعنی

$$S_b^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i(x_i-\bar{x})^2$$

در مبحث استنباط آماری واریانس را از مجموع مجذور انحرافات داده‌ها تقسیم بر n−1 به دست می‌آورند و آنرا با نماد S^2 نمایش می‌دهند، یعنی

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}f_i(x_i-\bar{x})^2$$

دلیل آماری این کار در مبحث استنباط آماری مشخص خواهد شد. در این کتاب هر جا صحبت از واریانس می‌کنیم منظور S^2 می‌باشد. جذر واریانس یعنی $S=\sqrt{S^2}$ را انحراف استاندارد گویند و انحراف استاندارد شاخص مناسبی برای سنجش پراکندگی می‌باشد. در قضیهٔ زیر روش ساده‌ای برای محاسبهٔ واریانس می آوریم.

قضیهٔ ۱.۱ واریانس را می توان از فرمول زیر محاسبه کرد

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}f_ix_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}f_ix_i\right)^2\right]$$

اثبات این قضیه در تمرین ۱۳ از متعلمین خواسته شده است.

مثال ۱۶.۵.۱ در مثال ۴.۳.۱ واریانس و انحراف استاندارد داده‌ها را محاسبه کنید.

حل با استفاده از جدول ۳.۱، جدول ۶.۱ را برای محاسبهٔ واریانس و انحراف استاندارد تشکیل می‌دهیم. با استفاده از این جدول و قضیهٔ ۱.۱ داریم

$$S^2=\frac{1}{39}\left[56965-\frac{(1275)^2}{40}\right]=66/096$$

$$S=\sqrt{66/096}=8/12$$

x_i	f_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
۲۳	۳	۶۹	۱۵۸۷
۲۸	۶	۱۶۸	۴۷۰۴
۳۳	۱۰	۳۳۰	۱۰۸۹۰
۳۸	۸	۳۰۴	۱۱۵۵۲
۴۳	۶	۲۵۸	۱۱۰۹۴
۴۸	۵	۲۴۰	۱۱۵۲۰
۵۳	۲	۱۰۶	۵۶۱۸
جمع	۴۰	۱۴۷۵	۵۶۹۶۵

جدول ۶.۱ جدول محاسبهٔ واریانس

روش تبدیل داده‌ها اگر داده‌ها بزرگ باشند محاسبات مربوط به واریانس مشکل می‌شود. در این حالت می‌توان برای محاسبهٔ واریانس از روش تبدیل داده‌ها استفاده کرد. در این روش داده‌های x_1، x_2، ... و x_k را بوسیلهٔ تبدیل زیر به داده‌های y_1، y_2، ... و y_k تبدیل می‌کنیم

$$y_i = \frac{x_i - a}{b} \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

که در آن اعداد a و b مقادیر ثابتی هستند و به ترتیب برای تغییر مبدأ و تغییر واحد اندازه‌گیری داده‌ها به کار برده می‌شوند. معمولاً در داده‌های پیوسته a را برابر نماینده ردهٔ نمایی و b را برابر طول رده یعنی w می‌گیرند. سپس میانگین و واریانس داده‌های جدید y_1، y_2، ... و y_k را محاسبه کرده و به سادگی می‌توان میانگین و واریانس داده‌های اصلی x_1، x_2، ... و x_k را از فرمولهای زیر به دست آورد

$$\bar{x} = a + b\bar{y} \quad , \quad S_x^2 = b^2 S_y^2 \quad , \quad S_x = bS_y$$

مثال ۱۷.۵.۱ در مثال ۵.۳.۱ میانگین، واریانس و انحراف استاندارد داده‌ها را از روش تبدیل داده‌ها محاسبه کنید.

حل با استفاده از جدول ۲.۱ و قرار دادن a=۲۸/۱ و b=۳/۱ جدول ۷.۱ را برای محاسبهٔ میانگین، واریانس و انحراف استاندارد تشکیل می‌دهیم. با استفاده از این جدول می‌توان محاسبات

...زیر را انجام داد

x_i	f_i	$y_i=\frac{x_i-۲۸/۱}{۳/۱}$	f_iy_i	$f_iy_i^۲$
۱۸/۸	۲	۳-	۶-	۱۸
۲۱/۹	۷	۲-	۱۴-	۲۸
۲۵/۰	۱۰	۱-	۱۰-	۱۰
۲۸/۱	۱۷	۰	۰	۰
۳۱/۲	۳	۱	۳	۳
۳۴/۳	۶	۲	۱۲	۲۴
۳۷/۴	۵	۳	۱۵	۴۵
جمع	۵۰		۰	۱۲۸

جدول ۷.۱ جدول محاسبهٔ واریانس به روش تبدیل داده‌ها

$$\bar{y}=\frac{۰}{۵۰}=۰ \ , \ S_y^۲=\frac{۱}{۴۹}\left[۱۲۸-\frac{(۰)^۲}{۵۰}\right]=۲/۶۱۲۲$$

$$\bar{x}=۲۸/۱+۳/۱(۰)=۲۸/۱ \ , \ S_x^۲=(۳/۱)^۲(۲/۶۱۲۲)=۲۵/۱۰۳ \ , \ S_x=۵/۰۱$$

د- ضریب تغییر واریانس و انحراف استاندارد به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی دارند. برای مقایسه دو سری داده بایستی از شاخص‌هایی استفاده کنیم که به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی نداشته باشند. یکی از این شاخص‌ها ضریب تغییر می‌باشد که به صورت $CV=\frac{S}{\bar{x}}$ تعریف می‌شود و معمولاً بر حسب درصد بیان می‌شود.

مثال ۱۸.۵.۱ کارخانه‌ای دو نوع لامپ تولید می‌کند. لامپ نوع اول دارای میانگین طول عمر ۲۰۰ ساعت با انحراف استاندارد ۱۱ ساعت و لامپ نوع دوم دارای میانگین طول عمر ۲۴۰ ساعت با انحراف استاندارد ۱۲ ساعت است. کدام نوع لامپ بهتر است؟

حل

$$\bar{x}_۱=۲۰۰ \ , \ S_۱=۱۱ \ , \ CV_۱=\frac{۱۱}{۲۰۰}=۰/۰۵۵ \Rightarrow CV_۱=\%۵/۵$$

$$\bar{x}_۲=۲۴۰ \ , \ S_۲=۱۲ \ , \ CV_۲=\frac{۱۲}{۲۴۰}=۰/۰۵ \Rightarrow CV_۲=\%۵$$

۶.۱ تمرینات

۱ چه تفاوتی بین آمار توصیفی و آمار استنباطی وجود دارد؟

۲ در هر یک از موارد زیر جمعیت، نمونه و صفت مربوطه را مشخص کنید.

الف- آموزگاری می‌خواهد میانگین نمرات درس ریاضی کلاس پنجم دبستان را، در دو منطقهٔ آموزشی مقایسه کند.

ب- مدیر یک فروشگاه زنجیره‌ای می‌خواهد میانگین فروش روزانه محصول جدیدی را در یکی از فروشگاهها برآورد کند.

ج- یک شرکت اتومبیل سازی می‌خواهد میزان مصرف بنزین در صد کیلومتر اتومبیلهای تولیدی شرکت در سال گذشته را برآورد کند.

۳ کدام یک از داده‌های زیر گسسته و کدام یک پیوسته هستند؟

الف- میزان بارندگی بر حسب سانتی متر، در یک شهر در طول ماههای سال.

ب- تعداد دانشجویان ورودی به دانشگاه در سالهای مختلف.

ج- طول عمر لامپهای تلویزیونی که توسط یک کارخانه تولید می‌شود.

د- اندازهٔ طول ۱۰۰۰ گلولهٔ تولید شده در یک کارخانهٔ اسلحه سازی.

ها تعداد سهام فروخته شده در بازار بورس در هر روز.

۴ تعداد اتومبیلهای تولید شده توسط یک شرکت اتومبیل سازی در ۱۸ روز کاری به شرح زیر می‌باشد

۱۱	۱۲	۱۴	۱۳	۱۲	۱۵	۱۶	۱۱	۱۲
۱۴	۱۰	۱۲	۱۵	۱۲	۱۲	۱۳	۱۱	۱۷

یک جدول فراوانی برای این داده‌ها تشکیل دهید و نمودار میله‌ای داده‌ها را رسم کنید.

۵ کاشی‌های تولیدی یک کارخانه کاشی‌سازی از نظر کیفیت در سه گروه درجهٔ یک، درجهٔ ۲ و درجهٔ ۳ طبقه‌بندی می‌شوند. جدول زیر توزیع کاشی‌های تولیدی این کارخانه را در هفتهٔ گذشته نشان می‌دهد.

یک نمودار دایره‌ای برای این داده‌ها رسم کنید.

۶ زمانهای شعله‌ور شدن نوعی از مواد پارچه‌ای که در معرض شعلهٔ آتش قرار گرفته‌اند به نزدیکترین صدم ثانیه گرد شده‌اند و به صورت زیر داده شده‌اند.

۵/۲۱	۴/۹۰	۳/۷۸	۱۱/۲۵	۶/۶۰	۲/۶۵	۶/۷۵	۵/۵۰	۴/۷۹	۲/۵۸
۱/۷۶	۳/۴۹	۳/۷۵	۳/۹۰	۸/۷۹	۷/۸۶	۵/۸۴	۵/۹۲	۶/۲۰	۲/۵۱
۹/۲۰	۶/۷۷	۳/۱۰	۵/۳۳	۵/۹۲	۴/۷۱	۸/۸۰	۴/۵۶	۱/۵۲	۴/۰۴
۱/۲۰	۵/۶۲	۶/۴۳	۸/۶۴	۹/۶۵	۶/۲۵	۷/۴۰	۲/۴۶	۱/۳۸	۶/۴۳
۶/۸۵	۹/۷۰	۱/۷۰	۷/۴۱	۵/۰۹	۹/۴۵	۴/۷۲	۶/۹۰	۳/۸۷	۱/۵۸
۲/۸۰	۵/۱۱	۶/۴۰	۷/۹۶	۴/۱۱	۱۲/۸۰	۳/۶۲	۱/۴۷	۴/۵۴	۴/۳۲
۷/۳۵	۴/۵۰	۳/۲۴	۱۰/۶۰	۶/۳۷	۱/۴۲	۲/۴۶	۲/۱۱	۵/۱۲	۲/۲۰
۱۱/۷۵	۲/۵۰	۱/۷۹	۳/۸۱	۵/۴۰	۱/۹۲	۸/۷۵	۲/۳۲	۵/۱۵	۴/۱۹

الف - یک جدول فراوانی برای این داده‌ها تشکیل دهید.

ب - هیستوگرام و چندبر فراوانی را برای این داده‌ها رسم کنید.

۷ در ۱۵۰۰ اندازه‌گیری، کوچکترین و بزرگترین عددهای به دست آمده به ترتیب ۱۰/۸ و ۱۱/۹ سانتیمتر بوده‌اند. برای تشکیل جدول فراوانی برای این داده‌ها، طول ردهٔ مناسب را پیدا کنید.

۸ در یک مرکز کامپیوتر دانشگاهی، در مدت ۶۰ روز، تعداد توقفهای ناشی از اشتباه ماشین در هر روز ثبت شده‌اند و داده‌های زیر به دست آمده‌اند

۰ ۱ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۱ ۳ ۰ ۲ ۰ ۶ ۳ ۴ ۰ ۰ ۵ ۸ ۱

۰ ۴ ۲ ۱ ۳ ۳ ۴ ۶ ۱ ۰ ۰ ۲ ۱ ۲ ۱ ۰ ۰ ۰ ۲ ۲

۲ ۲ ۰ ۴ ۴ ۲ ۰ ۲ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ ۰

الف - جدول فراوانی را برای این داده‌ها تشکیل دهید.

ب - نمودار میله‌ای و نمودار دایره‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

ج - در چه نسبتی از روزها تعداد توقفها بیشتر از ۳ بار بوده است.

۹ شرکتی دارای ۵۰ اتومبیل است که بیمهٔ بدنه شده‌اند. تعداد مراجعات به شرکت بیمه برای دریافت خسارت این اتومبیلها در سال گذشته به صورت زیر بوده است

@Kiau_IT www.mohandesidl.ir

تعداد خسارتها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد اتومبیلها	۲۱	۱۳	۵	۴	۲	۳	۲

الف - میانگین، میانه و نمای تعداد خسارتها را محاسبه کنید.

ب - واریانس و انحراف استاندارد خسارتها را محاسبه کنید.

۱۰ فراوانی رده‌های نامساوی ۱۳/۵-۱۰/۵، ۱۷/۵-۱۳/۵، ۱۹/۵-۱۷/۵ و ۲۲/۵-۱۹/۵ به ترتیب ۵، ۷، ۲ و ۶ می‌باشد. با استفاده از رابطه

فراوانس نسبی رده = عرض مستطیل × طول رده

هیستوگرام را به گونه‌ای رسم کنید که مساحت تمام مستطیل‌های هیستوگرام یک واحد مربع شود.

۱۱ اگر میانگین یک سری داده‌های m تایی برابر $\bar{x}$ و میانگین یک سری داده‌های n تایی برابر $\bar{y}$ باشد، ثابت کنید که میانگین آمیخته این دو سری از داده‌ها برابر $\frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+n}$ است.

۱۲ اگر بر روی داده‌های x_1، x_2، ... و x_k با فراوانیهای f_1، f_2، ... و f_k تبدیل $i=1,...,k$ $\quad y_i=\frac{x_i-a}{b}$ را انجام دهیم، نشان دهید که رابطهٔ بین میانگین و واریانس y_iها و x_iها به صورت زیر می‌باشد

$$\bar{x}=a+b\bar{y} \quad , \quad S_x^2=b^2S_y^2$$

۱۳ قضیهٔ ۱.۱ را اثبات کنید.

۱۴ داده‌های زیر قطر ۵۰ بلبرینگ ساخته شده توسط یک کارخانه بر حسب اینچ می‌باشد

۰/۷۳۷	۰/۷۲۹	۰/۷۲۶	۰/۷۳۵	۰/۷۲۱	۰/۷۳۶	۰/۷۴۰	۰/۷۴۳	۰/۷۳۸	۰/۷۳۱
۰/۷۳۵	۰/۷۳۹	۰/۷۴۲	۰/۷۳۳	۰/۷۲۴	۰/۷۳۵	۰/۷۳۶	۰/۷۳۷	۰/۷۲۸	۰/۷۳۶
۰/۷۳۲	۰/۷۳۴	۰/۷۳۵	۰/۷۳۸	۰/۷۲۸	۰/۷۴۰	۰/۷۴۲	۰/۷۳۶	۰/۷۴۵	۰/۷۳۳
۰/۷۳۵	۰/۷۲۷	۰/۷۳۸	۰/۷۳۴	۰/۷۳۰	۰/۷۳۹	۰/۷۳۲	۰/۷۳۰	۰/۷۳۳	۰/۷۳۹
۰/۷۲۴	۰/۷۳۶	۰/۷۳۶	۰/۷۳۲	۰/۷۳۴	۰/۷۲۷	۰/۷۳۵	۰/۷۳۲	۰/۷۳۵	۰/۷۴۱

الف - یک جدول فراوانی برای این داده‌ها تشکیل دهید و هیستوگرام و چندبر فراوانی داده‌ها را رسم کنید.

ب - میانگین، میانه و نما و انحراف استاندارد داده‌ها را محاسبه کنید.

@Kiau_IT www.mohandesidl.ir

ج- چند درصد داده‌ها در فاصلهٔ $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$ و چند درصد داده‌ها در فاصلهٔ $(\bar{x}-2s,\bar{x}+2s)$ قرار دارند؟

۱۵ نشان دهید که ضریب تغییر به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد، یعنی اگر داده‌ها را در عدد ثابت b ضرب کنیم، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

۱۶ تعداد گلهای به ثمر رسیده توسط دو تیم A و B در طول یک دوره مسابقات به صورت زیر است. کدام تیم وضع بهتری دارد؟

تعداد گلها در مسابقه	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد بازیهای تیم A	۵۴	۱۸	۱۶	۱۰	۸
تعداد بازیهای تیم B	۳۴	۱۸	۱۲	۱۰	۶

۱۷ جدول زیر جدول فراوانی مربوط به وزن تعدادی از دانش‌آموزان یک دبیرستان را نشان می‌دهد

رده‌ها	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۳۰/۵-۳۵/۵			۰/۰۶		
۳۵/۵-۴۰/۵		۷			
				۱۹	
					۰/۶۴
			۰/۱۶		
				۴۶	
جمع		۵۰	۱/۰۰		

الف- جدول را کامل کنید.

ب- میانگین، میانه، نما و انحراف استاندارد را محاسبه کنید.

۱۸ عدد Q_p که $0 < p < 1$ را چندک مرتبهٔ p ام داده‌ها گویند هرگاه تقریباً ٪۱۰۰p داده‌ها قبل از آن قرار گیرند. در حالت خاص $Q_{0/25}=Q_1$ و $Q_{0/5}=Q_2$ و $Q_{0/75}=Q_3$ را به ترتیب چارکهای اول و دوم و سوم داده‌ها گویند.

@Kiau_IT www.mohandesidl.ir

الف - نشان دهید که برای داده‌های گسسته $Q_p=(1-w)x_{(r)}+wx_{(r+1)}$ که در آن $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ … و $x_{(n)}$ داده‌های مرتب شده به طور غیر نزولی، $r=[(n+1)p]$ و $w=(n+1)p-r$ می‌باشد.

ب - نشان دهید که برای داده‌های پیوسته $Q_p=L_p+\frac{(np-g_p)\,w}{f_p}$ که در آن L_p کران پائین رده‌ای است که فراوانی تجمعی نسبی آن بزرگتر یا مساوی p است که به آن ردهٔ Q_p گوئیم، g_p فراوانی تجمعی ردهٔ قبل از ردهٔ Q_p، f_p فراوانی ردهٔ Q_p و w طول رده می‌باشد.

۱۹ در تمرین ۴، میانه و چارک اول داده‌ها را محاسبه کنید.

۲۰ در تمرین ۶، میانگین، انحراف استاندارد، میانه و چارک سوم داده‌ها را محاسبه کنید.

۲۱ در تمرین ۸ چارک دوم و $Q_{./9}$ را محاسبه کنید.

تعریف ۱.۲ آزمایشی که تحت شرایط یکسان بتوان آن را تکرار کرد و نتیجه آن قبل از انجام آزمایش قابل تعیین نبوده ولی کلیه نتایج ممکن آن قابل تعیین باشد را یک آزمایش تصادفی گویند.

مثال ۱.۲.۲ هر کدام از موارد زیر یک آزمایش تصادفی است.

الف- پرتاب یک سکه

ب- پرتاب یک تاس

ج- پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهده یک شیر

د- اندازه‌گیری درجه حرارت بدن یک بیمار در یک شبانه روز

ه- اندازه‌گیری طول عمر یک لامپ

در هر یک از آزمایشهای مثال ۱.۲.۲ نتیجه آزمایش از قبل قابل تعیین نیست ولی کلیه نتایج آزمایش قابل تعیین می‌باشند. مثلاً در پرتاب یک تاس یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ ظاهر می‌شود ولی قبل از انجام آزمایش نمی‌توان گفت که کدام عدد رخ می‌دهد.

تعریف ۲.۲ مجموعه تمام نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند و آن را با نماد S نمایش می دهند.

مثال ۲.۲.۲ در مثال ۱.۲.۲ فضای نمونه آزمایشهای تصادفی عبارت اند از

الف- در پرتاب یک سکه داریم $S=\{H,T\}$ که در آن H نمایانگر رخداد "شیر" و T نمایانگر رخداد "خط" است و در پرتاب دو سکه داریم $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

ب- در پرتاب یک تاس داریم $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

همینطور فضای نمونه حاصل از پرتاب دو تاس عبارت است از

$S=\{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}=\{(x,y)\mid x,y=1,2,\dots,6\}$

ج- فضای نمونه حاصل از پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر عبارت است از

$S=\{H,TH,TTH,TTTH,\dots\}$

د- اگر درجه حرارت بدن یک بیمار در یک شبانه روز را اندازه‌گیری کنیم آنگاه فضای نمونه عبارت است از $S=[35,42]$ که یک فاصله بسته است.

ه- اگر طول عمر لامپ تولیدی یک کارخانه که حداکثر ۱۰۰۰۰ ساعت طول عمر دارد را اندازه‌گیری کنیم آنگاه فضای نمونه فاصله $S=[0,10000]$ است.

مثال ۳.۲.۲ از خط تولید یک کارخانه ۳ محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. این محصولات ممکن است خراب یا سالم باشند.

الف- اگر خراب بودن محصول را با D و سالم بودن آن را با N نمایش دهیم، آنگاه فضای نمونه موردنظر عبارت است از

$S_1=\{NNN,NND,NDN,DNN,DDN,DND,NDD,DDD\}$

ب- اگر به تعداد قطعات خراب در بین ۳ قطعه انتخابی توجه کنیم آنگاه فضای نمونه عبارت است از

$S_2=\{0,1,2,3\}$

مثال ۳.۲.۲ نشان می‌دهد که در یک آزمایش تصادفی، ممکن است بیش از یک فضای نمونه داشته باشیم و جنبه موردنظر از آزمایش تصادفی است که فضای نمونه را تعیین می‌کند. همچنین با توجه به مثالهای بالا می‌توان فضاهای نمونه را به طور کلی به دو گروه زیر تقسیم نمود

۱- **فضای نمونه گسسته** که شامل دو حالت زیر است

الف- فضای نمونه متناهی که تعداد اعضای آن متناهی است، مانند فضای نمونه در مثال ۲.۲.۲(الف) و (ب).

ب- فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر که یک مجموعه نامتناهی اما شمارش‌پذیر است، مانند مثال ۲.۲.۲(ج).

۲- **فضای نمونه پیوسته** که اعضای آن به صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی یا... است، مانند مثال ۲.۲.۲ (د) و (ه).

در ادامه نخست بیشتر در مورد فضای نمونه متناهی بحث می‌کنیم و سپس در مورد فضاهای نمونه دیگر در طول فصل بحث می‌کنیم.

تعریف ۳.۲ در یک فضای نمونه متناهی، هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامند. پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد به پیشامد ساده موسوم است و پیشامدی با تعداد اعضای بیشتر از یک عضو را پیشامد مرکب گوئیم. اگر پیشامدی دارای هیچ عضوی نباشد آن را پیشامد محال یا تهی می‌نامیم و پیشامدی که برابر فضای نمونه S باشد به پیشامد حتمی موسوم است.

مثال ۴.۲.۲ اگر یک جفت تاس را یک بار پرتاب کنیم، آنگاه فضای نمونه آن عبارت است از

$S=\{(x,y)\mid x,y=1,2,\dots,6\}$

الف- اگر E_1 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس کمتر از ۳ باشد آنگاه E_1 یک پیشامد ساده است و

$E_1=\{(۱,۱)\}$

ب- اگر E_2 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس بیش از ۱۰ باشد آنگاه E_2 یک پیشامد مرکب است و

$E_2=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$

ج- اگر E_3 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس حداقل ۱۳ باشد آنگاه E_3 یک پیشامد محال است و

$E_3=\emptyset$

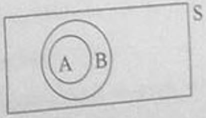
د- اگر E_4 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۱۲ باشد آنگاه E_4 یک پیشامد حتمی است و

$E_4=S$

وقوع یک پیشامد گوئیم پیشامد A به وقوع پیوسته است هر گاه نتیجه آزمایش تصادفی منجر به مشاهده عضوی از پیشامد A گردد. برای مثال در مثال ۴.۲.۲ اگر در پرتاب دو تاس نتیجه (۶,۵) را مشاهده کنیم آنگاه گوئیم پیشامد E_2 به وقوع پیوسته و پیشامد E_1 رخ نداده است.

۱.۲.۲ اعمال روی پیشامدها

چون پیشامدها زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه هستند پس می‌توان همانند مجموعه‌ها اعمال جبری را روی آنها انجام داد. در این حالت فضای نمونه مجموعهٔ مرجع می‌باشد و توسط نمودار ون می‌توان پیشامدها و فضای نمونه را به صورت شکل ۱.۲ نمایش داد. بعضی از اعمال روی پیشامدها عبارت‌اند از



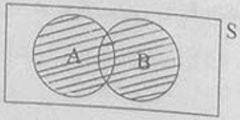
شکل ۱.۲ $A\subset B$

الف- زیر پیشامد پیشامد A را زیر پیشامد، پیشامد B گوئیم هر گاه وقوع A، وقوع B را نتیجه دهد (شکل ۱.۲) و آنرا با نماد $A\subset B$ نمایش می‌دهیم.

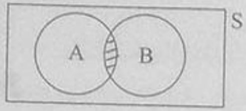
ب- دو پیشامد مساوی دو پیشامد A و B را مساوی گوئیم هر گاه وقوع یکی وقوع دیگری را نتیجه دهد، یعنی

$A=B \Leftrightarrow (A\subset B\ ,\ B\subset A)$

پ- اجتماع دو پیشامد پیشامد $A\cup B=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\}$ را اجتماع دو پیشامد A و B گوئیم و وقوع $A\cup B$ به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B است (شکل ۲.۲).



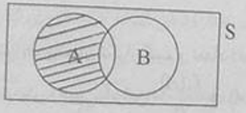
شکل ۲.۲ پیشامد $A\cup B$



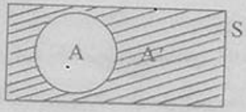
شکل ۳.۲ پیشامد $A\cap B$

ت- اشتراک دو پیشامد پیشامد $A\cap B=\{x \mid x\in A$ و $x\in B\}$ را اشتراک دو پیشامد A و B گوئیم و وقوع $A\cap B$ به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد A و B است (شکل ۳.۲).

ث- تفاضل دو پیشامد پیشامد $A-B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\notin B\}$ را تفاضل پیشامد B از A گوئیم و وقوع $A-B$ به معنای وقوع «فقط A و نه B» است (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲ پیشامد $A-B$



شکل ۵.۲ پیشامد A'

ج- متمم یک پیشامد پیشامد $A'=\{x \mid x\in S\ ,\ x\notin A\}$ را متمم پیشامد A گوئیم و وقوع A' به معنای عدم وقوع پیشامد A است (شکل ۵.۲).

اشتراک و اجتماع بیش از دو پیشامد نیز به نحو مشابهی تعریف می‌گردد. اجتماع پیشامدهای A_1، A_2، ... و A_m شامل اعضایی است که حداقل به یکی از A_iها متعلق باشد و اشتراک آنها شامل اعضایی است که در همه پیشامدهای A_1، A_2، ... و A_m باشند. یعنی

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m \qquad \bigcap_{i=1}^{m} A_i = A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_m$$

تعریف ۴.۲ دو پیشامد A و B را ناسازگار (جدا) گوئیم هر گاه $A\cap B=\emptyset$، یعنی دو پیشامد را ناسازگار گوئیم هر گاه هر دو نتوانند همزمان اتفاق بیفتند.

مثال ۵.۲.۲ در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد مشاهده عدد زوج و B پیشامد مشاهده عدد فرد باشد آنگاه

$A=\{۲,۴,۶\}\ ,\quad B=\{۱,۳,۵\}\ ,\quad A\cap B=\emptyset$

بنابراین A و B ناسازگار هستند.

تعریف ۵.۲ پیشامدهای $A_1 ، A_2 ، A_3$ و ... را دو به دو ناسازگار گوئیم هر گاه به ازای هر $i \neq j$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

۳.۲ احتمال

احتمال وقوع یک پیشامد به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است. برای محاسبه احتمال تعبیرهای مختلفی از جمله فراوانی نسبی، هم شانسی و شخصی وجود دارد که هر کدام از این تعبیرها می‌تواند برای بکارگیری احتمال در مسایل عملی مفید باشند ولی به هر کدام انتقادهایی وارد است. در زیر ابتدا روش محاسبه احتمال به طریق فراوانی نسبی را می‌آوریم و سپس تعریف ریاضی احتمال که بر اساس اصول موضوع احتمالات قرار دارد را می‌آوریم.

فرض کنید یک آزمایش تصادفی را n مرتبه تحت شرایط یکسان تکرار کنیم و تعداد دفعاتی که در این n آزمایش پیشامد A بوقوع پیوسته را با $f_n(A)$ نمایش دهیم. بنابراین $r_n(A) = \frac{f_n(A)}{n}$ فراوانی نسبی وقوع پیشامد A می‌باشد و انتظار داریم که با زیاد شدن تعداد آزمایشات n، $r_n(A)$ به یک عدد ثابتی نزدیک شود که این عدد ثابت را احتمال وقوع پیشامد A گوئیم و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} r_n(A)$$

اما انجام آزمایش تصادفی به تعداد دفعات زیاد ممکن است عملی نباشد و یا ممکن است $r_n(A)$ به یک عدد ثابت نزدیک نشود. با این وجود در بیشتر موارد عملی از این تعبیر احتمال برای محاسبه احتمال استفاده می‌شود و این تعبیر با اصول موضوع احتمال که در زیر ارائه می‌شوند، نیز سازگاری دارد. برای مثال اگر سکه‌ای را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کنیم و مشاهده کنیم که ۴۹۵ مرتبه شیر و ۵۰۵ مرتبه خط مشاهده شده است در این صورت فراوانی نسبی مشاهده شیر و خط به ترتیب ۰/۴۹۵ و ۰/۵۰۵ می‌باشد و می‌توان احتمال وقوع هر کدام از این دو پیشامد را $0/5 = \frac{1}{2}$ در نظر گرفت.

تعریف ریاضی تابع احتمال تابع احتمال تابعی از فضای نمونه S به داخل مجموعه اعداد حقیقی R به صورت $P: S \to R$ است (به عبارت دقیقتر احتمال تابعی مانند P است که به هر پیشامد A از فضای نمونه S عدد حقیقی $P(A)$ را به گونه‌ای نسبت می‌دهد که در ۳ اصل موضوع زیر صدق

کند

۱- $P(S) = 1$

۲- برای هر پیشامد A در S، $P(A) \geq 0$

۳- اگر $A_1 ، A_2 ، A_3$ و ... پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

در ادامه تابع احتمال را روی هر یک از فضاهای نمونه گسسته و پیوسته به دست می‌آوریم.

۱.۳.۲ مدل احتمال روی فضای نمونه متناهی

فرض کنید $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک فضای نمونه متناهی غیرتهی باشد. یک مدل احتمال روی این فضای نمونه عبارت است از نسبت دادن اوزان (احتمالات) نامنفی $p_1 ، p_2 ، \dots$ و p_n به نقاط فضای نمونه S به طوری که مجموع تمام این اعداد برابر یک شود یعنی

S	e_1	e_2	...	e_n
احتمال	p_1	p_2	...	p_n

$$0 \leq p_i \leq 1 , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

این اعداد متضمن ارزیابی وقوع پیشامدهای ساده یک آزمایش تصادفی می‌باشند و بایستی به گونه‌ای نسبت داده شوند که پیشامد ساده‌ای که شانس وقوع آن کمتر است عدد نسبت داده شده به صفر نزدیکتر و پیشامد ساده‌ای که شانس وقوع آن بیشتر است عدد نسبت داده شده به یک نزدیکتر باشد. اگر در یک فضای نمونه پیشامدهای ساده شانس یکسان برای اتفاق افتادن داشته باشند در این صورت بایستی اعداد (احتمالات) یکسان به این نقاط نسبت داده شود. برای مثال در پرتاب یک تاس مدل احتمال برابر است با

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

حال اگر A یک پیشامد در فضای نمونه S باشد، احتمال پیشامد A برابر مجموع تمام احتمالات نسبت داده شده به پیشامدهای ساده تشکیل دهنده A در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subset S \Rightarrow P(A) = p_1 + p_2 + \dots + p_m = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

به راحتی می‌توان نشان داد که تعریف فوق در ۳ اصل احتمال صدق می‌کند.

مثال ۱.۳.۲ سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم احتمال آوردن حداقل یک شیر را بیابید.

حل فضای نمونه حاصل از این آزمایش برابر است با $S=\{TT,TH,HT,HH\}$

اگر سکه سالم باشد آنگاه شانس رخداد شیر یا خط با هم برابر است و در نتیجه به هر کدام از نقاط فضای نمونه شانس یکسان w را نسبت می‌دهیم و بنابراین $4w=1$ و یا $w=\frac{1}{4}$. پس مدل احتمال برای این آزمایش عبارت است از

S	TT	TH	HT	HH
احتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

حال اگر A پیشامد مشاهده حداقل یک شیر باشد آنگاه $A=\{TH,HT,HH\}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال ۲.۳.۲ یک تاس به شکلی است که احتمال آوردن عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد می‌باشد. احتمال آوردن عدد بیشتر از ۳ در پرتاب این تاس را بیابید.

حل فضای نمونه حاصل از این آزمایش برابر است با $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

اگر به اعداد فرد شانس w و به اعداد زوج شانس 2w را نسبت دهیم، چون بایستی جمع احتمالات برابر یک شود پس بایستی $w=\frac{1}{9}$ باشد و بنابراین مدل احتمال برای این آزمایش تصادفی عبارت است از

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

حال اگر B پیشامد مشاهده عدد بیشتر از ۳ باشد آنگاه $B=\{4,5,6\}$ و در نتیجه

$$P(B)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

مدل احتمال یکنواخت در مثالهای بالا ضرایب وزنی w در حکم احتمال پیشامدهای ساده می‌باشند. با مقایسه دو مثال ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ مشاهده می‌شود که اگر نقاط فضای نمونه $S=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ دارای شانس مساوی برای انتخاب شدن باشند آنگاه احتمال وقوع هر پیشامد $A=\{e'_1,e'_2,\dots,e'_m\}$ در S عبارت است از

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{A تعداد اعضای پیشامد}}{\text{S تعداد اعضای فضای نمونه}}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

این مدل احتمال را مدل احتمال یکنواخت گویند.

مثال ۳.۳.۲ یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آوردن مجموع هفت را به دست آورید.

حل در این آزمایش فضای نمونه دارای $n(S)=6^2=36$ عضو است که همگی دارای شانس یکسان برای به وقوع پیوستن هستند. حال اگر A پیشامد مشاهده مجموع هفت باشد آنگاه

$$A=\{(1,6),(2,5),\dots,(6,1)\}$$

و $n(A)=6$ بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

مثال ۴.۳.۲ جعبه‌ای شامل ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۵ توپ قرمز است. یک توپ به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم

الف- احتمال اینکه توپ انتخابی قرمز باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه توپ انتخابی سفید باشد را بیابید.

حل در این آزمایش فضای نمونه دارای $n(S)=12$ عضو می‌باشد که شانس انتخاب هر توپ با یکدیگر مساوی است.

الف- اگر R پیشامد مشاهده توپ قرمز باشد آنگاه $n(R)=5$ و $P(R)=\frac{n(R)}{n(S)}=\frac{5}{12}$

ب- اگر W پیشامد مشاهده توپ سفید باشد آنگاه $n(W)=3$ و $P(W)=\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{3}{12}$

تذکر توجه کنید که اگر نتوان احتمالات مساوی را به نقاط فضای نمونه نسبت داد، بایستی از طریق تجربه و آزمایش ضرایب وزنی w را به نقاط فضای نمونه نسبت داده و مدل احتمال را تعیین کنیم.

۴.۲ چند قانون احتمال

با استفاده از ۳ اصل احتمال می‌توان نتایج زیر را که برای محاسبه احتمالات مفید می‌باشند، به دست آورد.

قضیه ۱.۲ $P(\emptyset)=0$

اثبات با قرار دادن $A_1=S$ و $A_2=A_3=\dots=\emptyset$ در اصل ۳ احتمال قضیه به سادگی اثبات می‌شود.

قضیه ۲.۲ اگر $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند آنگاه

$$P(B_1\cup B_2\cup \dots\cup B_n)=P(B_1)+P(B_2)+\dots+P(B_n)$$

اثبات با قرار دادن $A_1=B_1, A_2=B_2, \dots, A_n=B_n$ و $A_i=\emptyset \quad \forall i>n$ در اصل ۳ احتمال قضیه به سادگی اثبات می‌شود.

نتیجه ۱.۲ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشد آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad (1.2)$$

مثال ۱.۴.۲ یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم احتمال آوردن مجموع هفت یا مجموع بیش از ده را بیابید.

حل در این آزمایش $n(S)=6^2=36$ و اگر A پیشامد مشاهده مجموع هفت باشد آنگاه $n(A)=6$ و $P(A)=\frac{6}{36}$ و اگر B پیشامد مشاهده مجموع بیش از ده باشد آنگاه $n(B)=3$ و $P(B)=\frac{3}{36}$. چون $A\cap B=\emptyset$ پس A و B ناسازگار هستند و بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{4}$$

قضیه ۳.۲ اگر A یک پیشامد و A' متمم آن باشد ($A\cup A'=S$) آنگاه

$$P(A)+P(A')=1 \quad \text{یا} \quad P(A')=1-P(A) \qquad (2.2)$$

اثبات چون $A\cup A'=S$ و $A\cap A'=\emptyset$ پس با قرار دادن $B=A'$ در نتیجه ۱.۲ قضیه اثبات می‌شود.

مثال ۲.۴.۲ اگر سکه‌ای را ۶ بار پرتاب کنیم آنگاه احتمال آوردن حداقل یک شیر را بیابید.

حل در این آزمایش $n(S)=2^6=64$ و اگر A پیشامد مشاهده حداقل یک شیر باشد آنگاه A' پیشامد مشاهده هیچ شیر است یعنی $A'=\{TTTTTT\}$ و $n(A')=1$ در نتیجه $P(A')=\frac{1}{64}$ و بنابراین

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

با استفاده از نتیجه ۱.۲ و اصول احتمال می‌توان نتایج زیر را به سادگی اثبات کرد. اثبات این نتایج را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۴.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند آنگاه

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \qquad (3.2)$$

نتیجه ۲.۲ اگر A و B دو پیشامد باشند که $A\subset B$ آنگاه

الف- $P(B-A)=P(B)-P(A)$

ب- $P(A)\le P(B)$

نتیجه ۳.۲ برای هر پیشامد A داریم که $0\le P(A)\le 1$

قضیه ۵.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad (4.2)$$

مثال ۳.۴.۲ در یک زندان معین معلوم شده است که $\frac{2}{3}$ از زندانیها دارای سن کمتر از ۲۵ سال و $\frac{3}{5}$ از زندانیها مرد و $\frac{5}{8}$ از زندانیها زن یا دارای سن حداقل ۲۵ سال می‌باشند. احتمال اینکه یک زندانی که به طور تصادفی انتخاب شده است زنی با حداقل سن ۲۵ سال باشد را بیابید.

حل اگر M پیشامد این باشد که زندانی انتخاب شده مرد باشد و A پیشامد این باشد که زندانی انتخاب شده دارای سن کمتر از ۲۵ سال باشد آنگاه

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(M)=\frac{3}{5}$, $P(M')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(M'\cup A')=\frac{5}{8}$, $P(M'\cap A')=?$

بنابراین با استفاده از فرمول (۴.۲) داریم که

$$P(M'\cap A')=P(M')+P(A')-P(M'\cup A')=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{5}{8}=\frac{13}{120}$$

مثال ۴.۴.۲ احتمال آنکه یک هواپیمای جدید، تایید طراحی را به دست آورد برابر با ۰/۱۶، کارآیی استفاده از مواد را کسب کند برابر با ۰/۲۴ و هر دو را کسب کند ۰/۱۱ است.

الف- احتمال آنکه لااقل یکی از دو تأیید را به دست آورد را بیابید.

ب- احتمال آنکه فقط یکی از دو تأیید را به دست آورد را بیابید.

حل اگر A پیشامد تأیید طراحی و B پیشامد کارآیی استفاده از مواد باشند آنگاه

$P(A)=0/16$, $P(B)=0/24$, $P(A\cap B)=0/11$

الف- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/16+0/24-0/11=0/29$

ب- پیشامد مورد نظر $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ می‌باشد. بنابراین با توجه به نتیجه ۲.۲(الف) داریم که

$$P((A\cup B)-(A\cap B)) = ۰/۲۹ - ۰/۱۱ = ۰/۱۸$$

۵.۲ قواعد شمارش

چنانچه در بخش قبل مشاهده شد برای محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد نیاز به محاسبه تعداد اعضای آن و تعداد اعضای فضای نمونه داریم. اغلب اوقات شمارش اعضای یک مجموعه کار دشواری است و برای انجام این کار نیاز به شناسایی برخی از اصول و قوانین داریم که در ذیل به معرفی آنها می‌پردازیم.

اصل ضرب فرض کنید که یک کار را بتوان با دو عمل پیاپی A و B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و به دنبال آن عمل B بتواند به n طریق انجام پذیرد آنگاه این کار به mn طریق انجام می‌پذیرد.

مثال ۱.۵.۲ با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت در صورتی که

الف- تکرار ارقام مجاز باشد. ب- تکرار ارقام مجاز نباشد.

حل نوشتن یک عدد دو رقمی شامل دو عمل، انتخاب رقم دهگان (A) و انتخاب رقم یکان (B) می‌باشد. بنابراین

الف- رقم دهگان می‌تواند یکی از ارقام ۱، ۲ یا ۳ به ۳ طریق و رقم یکان یکی از ارقام ۰، ۱، ۲ یا ۳ به ۴ طریق باشد، بنابراین

A B
[۳] × [۴] = ۱۲

ب- رقم دهگان می‌تواند یکی از ارقام ۱، ۲ یا ۳ به ۳ طریق و رقم یکان می‌تواند رقم ۰ یا یکی از دو رقم باقی مانده از ارقام ۱، ۲ یا ۳ باشد، بنابراین

A B
[۳] × [۳] = ۹

اصل جمع فرض کنید یک کار را بتوان با دو عمل A یا B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیرند و این دو عمل نتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه این کار به m+n طریق انجام می‌پذیرد.

مثال ۲.۵.۲ به چند طریق می‌توان از بین ۴ دانشجوی کامپیوتر و ۵ دانشجوی ریاضی، دو دانشجو را انتخاب کرد به طوری که نفر اول به عنوان سرگروه و نفر دوم به عنوان دستیار باشد و هر دو نفر از یک رشته باشند.

حل طبق اصل ضرب دو دانشجو از رشته کامپیوتر به ۱۲=۳×۴ طریق یا از رشته ریاضی به ۲۰=۴×۵ طریق انتخاب می‌شوند. بنابراین طبق اصل جمع این دو نفر را می‌توان به ۳۲=۲۰+۱۲ طریق انتخاب کرد.

اصول جمع و ضرب را می‌توان برای بیش از دو عمل، مثلاً k عمل A_1، A_2، ....، و A_k نیز گسترش داد.

مثال ۳.۵.۲ یک تاس سالم را ۴ بار به طور مستقل پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در هیچکدام از پرتابها عدد مضرب ۳ مشاهده نشود را بیابید؟

حل در این آزمایش $n(S)$ برابر تعداد حالات ممکن پرتاب ۴ بار یک تاس است، پس $n(S)=6\times6\times6\times6=6^4$ و اگر A پیشامد این باشد که عدد مضرب ۳ مشاهده نشود آنگاه در هر پرتاب ۴ حالت ۱، ۲، ۴ و ۵ مورد نظر ما می‌باشد، بنابراین $n(A)=4\times4\times4\times4=4^4$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4^4}{6^4}=\frac{16}{81}$$

مثال ۴.۵.۲ تحت هر یک از شرایط زیر تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان ساخت را به دست آورید.

الف- اعداد فرد باشند.

ب- اعداد بزرگتر از عدد ۳۳۰ باشند.

پ- اعداد زوج باشند.

حل الف- در این حالت ابتدا رقم یکان به ۳ طریق (ارقام ۱، ۳ و ۵) انتخاب می‌شود. سپس رقم صدگان که به غیر از صفر و رقم یکان انتخاب شده می‌باشد به ۴ طریق انتخاب شده و در آخر رقم دهگان نیز به ۴ طریق انتخاب می‌شود و بنابراین تعداد طریق انتخاب ۴۸=۳×۴×۴ است.

ب- این اعداد به دو صورت می‌باشند. اعدادی که رقم صدگان آنها ۴ یا ۵ است که تعداد طریق انتخاب آنها ۴۰=۴×۵×۲ است، یا اعدادی که رقم صدگان آنها ۳ است که تعداد طریق انتخاب آنها

۸=۴×۲×۱ است. پس طبق اصل جمع تعداد طریق‌های انتخاب برابر ۴۸=۸+۴۰ است.

پ- چون تعداد اعداد زوج متمم تعداد اعداد فرد است و تعداد کل اعداد بدون تکرار ارقام ۱۰۰=۴×۵×۵ است پس تعداد اعداد زوج ۵۲=۴۸-۱۰۰ است. آیا می‌توانید تعداد اعداد زوج را به طور مستقیم محاسبه کنید؟

جایگشتها در بعضی از مسایل می‌خواهیم تعداد طریق قرار گرفتن ۶ نفر در یک صف و یا تعداد طریق انتخاب ۲ نفر از بین ۶ نفر را به دست آوریم. برای این منظور می‌توان از اصول شمارش و مفهوم جایگشت استفاده کنیم.

تعریف ۶.۲ ترتیبی را که می‌توان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد یک جایگشت گویند.

مثال ۵.۵.۲ جایگشتها و تعداد جایگشتهای مختلف سه حرف a، b و c را به دست آورید.

حل جایگشتهای مختلف این ۳ حرف عبارت‌اند از abc-acb-bac-bca-cab-cba. برای به دست آوردن تعداد جایگشتها، این ۳ حرف را می‌خواهیم در ۳ مکان قرار دهیم. مکان اول به ۳ طریق و مکان دوم به دو طریق و مکان سوم به یک طریق می‌توانند اشغال شوند بنابراین تعداد کل جایگشتها برابر ۶=۱×۲×۳=!۳ می‌باشد.

در حالت کلی داریم که

> اگر n عنصر متمایز را بخواهیم در یک صف کنار یکدیگر قرار دهیم تعداد جایگشتهای مختلف این عناصر برابر است با $n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)=n!$

مثال ۶.۵.۲ چهار پزشک و پنج مهندس می‌خواهند در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند.

الف- احتمال اینکه مهندس‌ها در یک طرف صف و پزشک‌ها در طرف دیگر صف قرار گیرند را بیابید.

ب- احتمال اینکه پزشک‌ها و مهندس‌ها یک در میان در صف قرار گیرند را بیابید.

ج- احتمال اینکه دو مهندس بخصوص همواره کنار یکدیگر قرار گیرند را بیابید.

د- احتمال اینکه دو مهندس بخصوص هیچگاه کنار یکدیگر قرار نگیرند را بیابید.

حل در این حالت $n(S)=9!$ یعنی تعداد کل حالات قرار گرفتن این ۹ نفر در صف می‌باشد.

الف- اگر A پیشامد قرار گرفتن پزشک‌ها در یک طرف صف (به !۴ طریق) و مهندس‌ها در طرف

دیگر صف (به !۵ طریق) باشد، چون شروع صف می‌تواند با پزشک‌ها یا مهندس‌ها باشد پس $n(A)=2!4!5!$ و در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2!4!5!}{9!}$

ب- اگر B پیشامد قرار گرفتن پزشک‌ها و مهندس‌ها یک در میان در صف باشد آنگاه مهندس‌ها به !۵ طریق در صف قرار می‌گیرند و پزشک‌ها به !۴ طریق در بین مهندس‌ها قرار می‌گیرند پس $P(B)=5!4!$ و در نتیجه $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4!5!}{9!}$

ج- اگر C پیشامد قرار گرفتن دو مهندس بخصوص در کنار یکدیگر باشد، این دو مهندس به !۲ طریق کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و با در نظر گرفتن این دو مهندس به عنوان یک عنصر، در کل ۸ عنصر داریم که می‌توانند در صف قرار گیرند پس $n(C)=8!2!$ و در نتیجه

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{8!2!}{9!}=\frac{2}{9}$$

د- پیشامد مورد نظر متمم C یعنی C' است، در نتیجه $P(C')=1-P(C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

مثال ۷.۵.۲ به چند طریق می‌توان با حروف a,b,c,d,e کلمات دو حرفی ساخت در صورتی که

الف- تکرار حروف مجاز نباشد. ب- تکرار حروف مجاز باشد.

حل الف- حالتهای مختلف ساختن کلمات دو حرفی بدون تکرار در شکل ۶.۲ مشاهده می‌گردد. با استفاده از اصل ضرب این تعداد به صورت زیر محاسبه می‌شود

ab	ac	ad	ae
ba	bc	bd	be
ca	cb	cd	ce
da	db	dc	de
ea	eb	ec	ed

$$5\times4=\frac{(5\times4)\times(3\times2\times1)}{(3\times2\times1)}=\frac{5!}{3!}=\frac{5!}{(5-2)!}$$

شکل ۶.۲ تبدیلات ۲ عنصر از ۵ عنصر

این مقدار را تبدیل ۲ از ۵ گوئیم و با نماد P_2^5 نمایش می‌دهیم.

ب- با استفاده از اصل ضرب این تعداد برابر $5\times5=5^2$ است.

در حالت کلی داریم که

اگر از بین n عنصر متمایز بخواهیم r عنصر را انتخاب کرده و در یک صف قرار دهیم در این صورت

الف- اگر تکرار عناصر مجاز نباشد آنگاه تعداد راه‌های، ممکن برابر است با

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ب- اگر تکرار عناصر مجاز باشد آنگاه تعداد راه‌های ممکن برابر است با n^r

به P_r^n تبدیل r از n گویند و بایستی همواره $0 \le r \le n$ باشد. چون ۱=!۰ پس $P_n^n = n!$ است.

مثال ۸.۵.۲ کلمه COMPUTER را در نظر بگیرید.

الف- تعداد کلمات ۸ حرفی بدون تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با $P_8^8 = 8!$

ب- تعداد کلمات ۵ حرفی بدون تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با $P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$

پ- تعداد کلمات ۵ حرفی با مجاز بودن تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با 8^5

مثال ۹.۵.۲ تعداد جایگشتها مختلف حروف کلمه BALL را به دست آورید.

حل در اینجا با عوض کردن جای دو حرف L در کلمه تغییری ایجاد نمی‌شود و جایگشتهای مختلف این حروف عبارت‌اند از

BALL - BLAL - BLLA - LBLA - LBAL - LLBA

ABLL - ALBL - ALLB - LALB - LABL - LLAB

که تعداد آنها ۱۲ است. اگر این ۴ حرف متمایز می‌بودند آنگاه تعداد جایگشتها ۲۴=!۴ می‌شد اما در هر یک از جایگشتهای بالا اگر جای دو حرف L را که به !۲ انجام می‌پذیرد، عوض کنیم تغییری در کلمات بوجود نمی‌آید و بنابراین تعداد جایگشتهای حاصل برابر $12 = \frac{4!}{2!}$ است.

مثال ۱۰.۵.۲ تعداد جایگشتهای مختلف حروف کلمه PEPPER را به دست آورید.

حل در اینجا ۳ حرف P یکسان و ۲ حرف E یکسان و ۱ حرف R داریم. بنابراین تعداد جایگشتهای مختلف حروف این کلمه برابر $60 = \frac{6\times5\times4}{2} = \frac{6!}{3!2!1!}$ است.

در حالت کلی داریم که

اگر n عنصر وجود داشته باشند که n_1 تای آنها از نوع اول و n_2 تای آنها از نوع دوم و ... و n_r تای آنها از نوع rام باشند که $n_1+n_2+...+n_r=n$ آنگاه تعداد جایگشتهای این عناصر برابر است با

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

مثال ۱۱.۵.۲ می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱، ۵ کتاب معادلات دیفرانسیل و ۴ کتاب آمار مهندسی را در کنار یکدیگر در یک قفسه قرار دهیم. احتمال اینکه هر ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ پهلوی هم قرار گیرند را بیابید.

حل در اینجا ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ مانند ۳ حرف M، ۵ کتاب معادلات مانند ۵ حرف E و ۴ کتاب آمار مانند ۴ حرف S می‌باشند پس تعداد طریق قرار گرفتن آنها در یک قفسه $n(S) = \frac{12!}{3!5!4!}$ است. حال اگر A پیشامد قرار گرفتن ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ پهلوی هم باشد آنگاه $n(A) = \frac{10!}{1!5!4!}$ زیرا ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ در حکم یک گروه متصل MMM می‌باشند. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10!}{1!5!4!} \times \frac{3!5!4!}{12!} = \frac{3!10!}{12!} = \frac{1}{22}$$

ترکیب اگر در قرار دادن اعضای متمایز یک مجموعه در کنار یکدیگر (و یا انتخاب اعضا از یک مجموعه) ترتیب قرار گرفتن اعضا در کنار یکدیگر (ترتیب انتخاب اعضا) مهم نباشد، در این صورت جایگشت حاصله را ترکیب گویند.

مثال ۱۲.۵.۲ حروف a,b,c,d,e را در نظر بگیرید

الف- از این حروف چند کلمه دو حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم نباشد.

ب- از این حروف چند کلمه هفت حرفی می‌توان ساخت به طوری که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم نباشد.

حل الف- این مثال همانند مثال ۷.۵.۲ است با این تفاوت که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم نیست، یعنی از دو حالت ab و ba فقط بایستی یکی را انتخاب کرد و... بنابراین تعداد کل حالات از تقسیم P_2^5 بر !۲ (تعداد جایگشتهای دو حرف انتخابی) به دست می‌آید یعنی

$$\text{تعداد کلمات} = \frac{P_2^5}{2!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

این تعداد را با $\binom{5}{2}$ یا C_2^5 نمایش داده و آن را ترکیب ۲ از ۵ گویند.

ب- در شکل ۷.۲-الف بعضی از کلمات ۷ حرفی مورد نظر مشخص شده‌اند. این حالات را می‌توان به صورت دیگری همانند شکل ۷.۲-ب نمایش داد که در آن تعداد xهای سمت چپ خط اول نمایانگر تعداد حرف a، تعداد xهای بین دو خط اول و دوم از سمت چپ نمایانگر تعداد حرف b و...

a a b b c d e	x x | x x | x | x | x
a b b c d e e	x | x x | x | x | x x
b c c d e e e	| x | x x | x | x x x
a b d d d e e	x | x | | x x x | x x
a a b c c e e	x x | x | x x | | x x
c c c c e e e	| | x x x x | | x x x
الف	ب

شکل ۷.۲ ترکیبات با تکرار

بنابراین تعداد کلمات مختلف از قرار دادن ۷ حرف x و چهار خط | به دست می‌آید که این تعداد برابر با $\frac{11!}{7!4!}$ و یا $\frac{11!}{7!4!}=\binom{5+7-1}{7}$ است.

در حالت کلی داریم که

> اگر از بین n عنصر متمایز بخواهیم r عنصر را انتخاب کنیم به طوری که ترتیب انتخاب مهم نباشد در این صورت
>
> الف- اگر تکرار عناصر مجاز نباشد آنگاه تعداد راه‌های ممکن برابر است با
>
> $$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
>
> ب- اگر تکرار عناصر مجاز باشد آنگاه تعداد راه‌های ممکن برابر است با
>
> $$\binom{n+r-1}{r}$$

به $\binom{n}{r}$ ترکیب r از n گویند و همواره بایستی $0 \le r \le n$ باشد.

مثال ۱۳.۵.۲ از بین ۴ پزشک و ۳ پرستار می‌خواهیم یک کمیته ۴ نفری تشکیل دهیم.

الف- احتمال اینکه اعضای کمیته شامل ۲ پزشک و ۲ پرستار باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه اعضای کمیته شامل حداقل ۲ پرستار باشد را بیابید.

حل چون در انتخاب افراد ترتیب مهم نیست، بنابراین تعداد انتخاب ۴ نفر از این ۷ نفر برابر $n(S)=\binom{7}{4}$ است.

الف- انتخاب ۲ پزشک به $\binom{4}{2}$ و انتخاب ۲ پرستار به $\binom{3}{2}$ طریق انجام می‌شود بنابراین اگر A پیشامد انتخاب ۲ پزشک و ۲ پرستار باشد آنگاه $n(A)=\binom{4}{2}\binom{3}{2}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}$$

ب- انتخاب حداقل ۲ پرستار به معنای انتخاب ۲ یا ۳ پرستار است، بنابراین اگر B پیشامد انتخاب حداقل ۲ پرستار باشد آنگاه طبق اصل جمع $n(B)=\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}$ است و در نتیجه

$$P(B)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}}{\binom{7}{4}}$$

مثال ۱۴.۵.۲ از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است، ۶ مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شوند را بیابید.

ب- احتمال اینکه از هر رنگ به تعداد مساوی مهره انتخاب شود را بیابید.

حل در اینجا ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست، پس $n(S)=\binom{12}{6}$

الف- اگر A پیشامد انتخاب ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید باشد آنگاه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{12}{6}}$$

ب- اگر B پیشامد انتخاب از هر رنگ به تعداد مساوی باشد آنگاه

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{12}{6}}$$

مثال ۱۵.۵.۲ تعداد جوابهای صحیح و غیرمنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_n=r$ که در آن $x_i \ge 0 \quad i=1,2,\dots,n$ را به دست آورید

حل مسأله مانند این است که بخواهیم r مهره را در n جعبه قرار دهیم بطوریکه تکرار مهره‌ها در جعبه‌ها مجاز و ترتیب قرار گرفتن مهره‌ها مهم نباشد. بنابراین با توجه به مثال ۱۲.۵.۲(ب) تعداد حالات ممکن برابر $\binom{n+r-1}{r}$ می‌باشد. توجه کنید که با مقایسه با مثال ۱۲.۵.۲(ب) مهره‌ها همان xها و دیواره‌های وسط جعبه‌ها همان خطوط | می‌باشند.

مثال ۱۶.۵.۲ مدیر یک شرکت خصوصی می‌خواهد ۵ سکه بهار آزادی را به عنوان پاداش بین ۳ کارمند A و B و C تقسیم کند احتمال اینکه به کارمند A حداقل ۲ سکه پاداش دهد را بیابید.

حل تعداد کل حالات پاداش دادن از حل معادله $x_1+x_2+x_3=5 \quad x_i \geq 0$ به دست می‌آید پس $n(S)=\binom{3+5-1}{5}$ اگر A پیشامد این باشد که کارمند A حداقل ۲ سکه دریافت کند آنگاه تعداد راههای ممکن از حل معادله $x_1+x_2+x_3=5,\ x_1 \geq 2,\ x_2,x_3 \geq 0$ و یا حل معادله $y_1+x_2+x_3=3,\ y_1=x_1-2 \geq 0,\ x_2,x_3 \geq 0$ به دست می‌آید بنابراین $n(A)=\binom{3+3-1}{3}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{5}}=\frac{10}{21}$$

۶.۲ مدل احتمال روی فضای نمونه نامتناهی

در بخشهای قبل در مورد محاسبه احتمال در فضای نمونه متناهی بحث کردیم. در این قسمت در مورد محاسبه احتمال در فضاهای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر و پیوسته بحث می‌کنیم.

۱.۶.۲ فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر

در این حالت فضای نمونه به صورت یک مجموعه نامتناهی شمارش‌پذیر مانند $S=\{e_1,e_2,e_3,\dots\}$ است که به هر یک از نقاط e_i احتمالات $0 \leq p_i \leq 1$ را به گونه‌ای نسبت می‌دهیم که $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$. در این فضا هر پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است و احتمال هر پیشامد را همانند حالت فضای نمونه متناهی محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۶.۲ سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده کنیم و سپس توقف می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه تعداد فردی پرتاب لازم باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه حداقل ۷ پرتاب لازم باشد را بیابید.

حل فضای نمونه و احتمالات نسبت داده شده به نقاط فضای نمونه به صورت زیر می‌باشد

S	H	TH	TTH	TTTH	....
احتمال	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	....

توجه کنید که مجموع کل احتمالات برابر ۱ می‌شود زیرا با توجه به اینکه این مجموع یک سری هندسی را تشکیل می‌دهد داریم که

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

الف- اگر e_i نمایانگر تعداد i پرتاب تا رسیدن به شیر باشد و A پیشامد تعداد فردی پرتاب باشد آنگاه $A=\{e_1,e_3,e_5,\dots\}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\dots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

ب- اگر B پیشامد حداقل ۷ پرتاب باشد آنگاه $B=\{e_7,e_8,e_9,\dots\}$ و در نتیجه

$$P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^9+\dots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

تذکر توجه کنید که در این حالت نمی‌توان یک مدل احتمال یکنواخت روی فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر پیاده کرد. زیرا اگر $p_i=p \quad \forall i=1,2,3,\dots$ در این صورت

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} p = +\infty$$

۲.۶.۲ فضای نمونه پیوسته

در یک حالت خاص فضای نمونه پیوسته را می‌توان به صورت یک فاصله کراندار $S=[a,b]$ از اعداد حقیقی (یا یک سطح محدود شده در فضای دو بعدی یا...) در نظر گرفت. در این حالت هر پیشامد می‌تواند به صورت یک زیر فاصله یا اجتماعی از زیرفاصله‌ها (یا یک زیرسطح در فضای دو بعدی یا...) باشد و اگر کل احتمال را به عنوان یک واحد جرم که به طور پیوسته و یکنواخت روی فاصله (یا سطح یا...) توزیع شده است، در نظر بگیریم آنگاه احتمال هر پیشامد A در این فضا را می‌توان به صورت زیر محاسبه می‌کرد

$$P(A)=\frac{\text{طول زیر فاصله A}}{\text{طول فاصله S}}\ \left(\text{یا}=\frac{\text{مساحت ناحیه A}}{\text{مساحت ناحیه S}}\ \text{یا} \ldots\right)$$

تذکر فضای نمونه پیوسته و همچنین پیشامدها و محاسبه احتمال در این فضا دارای مفاهیم وسیعتر از موارد گفته شده در بالا می‌باشند. این مفاهیم در کتابهای پیشرفته احتمال مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال ۲.۶.۲ عددی را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی [۱,۴] انتخاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه عدد انتخابی در فاصله [۲,۳/۵] باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه عدد انتخابی دقیقاً ۲ باشد را بیابید.

حل الف- در اینجا S=[۱,۴] و A=[۲,۳/۵] بنابراین

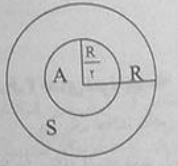
$$P(A)=\frac{\text{طول فاصله A}}{\text{طول فاصله S}}=\frac{۳/۵-۲}{۴-۱}=\frac{۱/۵}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

ب- چون در فاصله [۱,۴] بی نهایت عدد وجود دارد و انتخاب یک عدد بخصوص در بین این اعداد غیرممکن است پس $P(\{۲\})=۰$.

* **تذکر** با توجه به مثال بالا، احتمال هر پیشامد تک عضوی در هر فضای نمونه پیوسته صفر می‌باشد.

مثال ۳.۶.۲ از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره کمتر از فاصله آن تا محیط دایره باشد را بیابید.

حل با توجه به شکل ۸.۲ فضای نمونه S شامل کلیه نقاط درون دایره است و نقاطی که درون دایره به شعاع $\frac{R}{۲}$ باشند فاصله‌اشان تا مرکز کمتر از فاصله‌اشان تا محیط دایره است و بنابراین پیشامد A مورد نظر ما را تشکیل می‌دهند. در نتیجه



شکل ۸.۲

$$P(A)=\frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت ناحیه } S}=\frac{\text{مساحت دایره به شعاع } \frac{R}{۲}}{\text{مساحت دایره به شعاع } R}=\frac{\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}}{\pi R^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

۷.۲ احتمال شرطی

در بعضی از مسایل نیاز به محاسبه احتمال رخداد پیشامد B را داریم مشروط بر اینکه پیشامد A اتفاق افتاده باشد. برای درک این موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۷.۲ یک تاس را که شانس رخداد عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد می‌باشد را یک بار پرتاب می‌کنیم.

الف- احتمال رخداد یک عدد زوج را بیابید.

ب- اگر بدانیم عدد حاصل از پرتاب تاس از ۳ بزرگتر بوده است، احتمال رخداد یک عدد زوج را بیابید.

حل الف- مدل احتمال در این آزمایش تصادفی عبارت است از

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمالات	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$

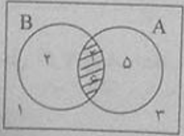
اگر B پیشامد رخداد عدد زوج باشد در این صورت B={۲,۴,۶} و بنابراین $P(B)=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$.

ب- بر اساس اطلاع داده شده فضای نمونه جدید عبارت است از A={۴,۵,۶} که چون شانس مشاهده عدد زوج دو برابر عدد فرد است، پس مدل احتمال روی این فضای نمونه جدید عبارت است از

A	۴	۵	۶
احتمالات	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$

بنابراین احتمال وقوع پیشامد B به شرط آنکه پیشامد A به وقوع پیوسته باشد برابر $\frac{۴}{۵}$ است که آن را با نماد $P(B\mid A)=\frac{۴}{۵}$ نمایش می‌دهند.

احتمال شرطی $P(B\mid A)$ را می‌توان از همان فضای نمونه اولیه به صورت زیر محاسبه کرد. با توجه به شکل ۹.۲ داریم که $P(B\mid A)\propto P(A\cap B)$ و در نتیجه $P(B\mid A)=kP(A\cap B)$. اما همواره داریم که $P(A\mid A)=۱$ و در نتیجه $۱=P(A\mid A)=kP(A\cap A)=kP(A)$ و اگر $P(A)\neq ۰$ باشد آنگاه $k=\frac{۱}{P(A)}$ و بنابراین



شکل ۹.۲ احتمال شرطی

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ ,\quad P(A)\neq ۰$$

برای مثال در مثال ۱.۷.۲ داریم که

$$A=\{4,5,6\} \Rightarrow P(A)=\frac{5}{9}$$

$$A\cap B=\{4,6\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{9}$$

در نتیجه

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{4}{5}=P(B\mid A)$$

که با مقدار به دست آمده از مثال فوق مطابقت دارد.

تعریف ۷.۲ احتمال شرطی پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A که آن را با نماد $P(B\mid A)$ نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A)\neq 0 \qquad (۵.۲)$$

مثال ۲.۷.۲ جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. از این جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم اگر این مهره سفید نباشد احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بیابید.

حل اگر B پیشامد سیاه بودن مهره و W' پیشامد سفید نبودن مهره باشد آنگاه احتمال مطلوب عبارت است از

$$P(B\mid W')=\frac{P(B\cap W')}{P(W')}=\frac{P(B)}{P(W')}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{2}{3}$$

مثال ۳.۷.۲ جدول زیر تعداد قطعات سالم و معیوب تولیدی توسط دو کارخانه ۱ و ۲ را نشان می‌دهد. اگر یک قطعه به طور تصادفی انتخاب شود و این قطعه سالم باشد، احتمال اینکه از کارخانه ۱ انتخاب شده باشد را بیابید.

	کارخانه ۱	کارخانه ۲	جمع
معیوب	۱۵	۵	۲۰
سالم	۴۵	۳۵	۸۰
جمع	۶۰	۴۰	۱۰۰

حل اگر A پیشامد انتخاب قطعه سالم و B پیشامد انتخاب قطعه از کارخانه ۱ باشد در این صورت

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{45}{100}}{\frac{80}{100}}=\frac{45}{80}$$

قانون ضرب احتمال از رابطه (۵.۲) نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۴.۲ اگر A و B دو پیشامد باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B\mid A) \quad , \quad P(A)\neq 0 \qquad (۶.۲)$$

این فرمول را قانون ضرب احتمال گویند.

مثال ۴.۷.۲ در مثال ۲.۷.۲ اگر دو مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم، مطلوب است

الف- احتمال اینکه مهره انتخابی اول سفید و دومی سیاه باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه مهره انتخابی اول سیاه و دومی قرمز باشد را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$W_i =$ پیشامد اینکه مهره انتخابی iام سفید باشد

$B_i =$ پیشامد اینکه مهره انتخابی iام سیاه باشد $\qquad i=1,2$

$R_i =$ پیشامد اینکه مهره انتخابی iام قرمز باشد

در این صورت $P(W_1)$ به معنای احتمال انتخاب اولین مهره سفید و $P(B_2\mid W_1)$ به معنای احتمال انتخاب دومین مهره سیاه به شرط آنکه بدانیم اولین مهره انتخابی سفید بوده است. بنابراین

الف- $P(W_1\cap B_2)=P(W_1)P(B_2\mid W_1)=\frac{3}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$

ب- $P(B_1\cap R_2)=P(B_1)P(R_2\mid B_1)=\frac{4}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{9}$

نتیجه ۴.۲ را می‌توان به حالت کلی‌تر زیر تعمیم داد.

نتیجه ۵.۲ اگر A_1، A_2، ... و A_k پیشامدهایی باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_k)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\ldots P(A_k\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}) \qquad (۷.۲)$$

مثال ۵.۷.۲ در مثال ۲.۷.۲ فرض کنید ۳ مهره یک به یک و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم. مطلوب است

الف- احتمال اینکه مهره انتخابی اول قرمز، دومی سفید و سومی قرمز باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک سفید انتخاب شوند را بیابید.

حل الف- با توجه به پیشامدهای معرفی شده در مثال ۴.۷.۲ داریم که

$$P(R_1 \cap W_2 \cap R_3) = P(R_1)P(W_2 \mid R_1)P(R_3 \mid R_1 \cap W_2) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

ب - در این حالت ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست. اگر A پیشامد انتخاب ۲ مهره قرمز و یک مهره سفید از جعبه باشد در این صورت

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$$

پیشامدهای مستقل در مثال ۴.۷.۲ فرض کنید پس از انتخاب مهره اول آن را به جعبه بازگردانده و سپس مهره دوم را انتخاب کنیم. در این صورت انتخاب مهره اول تأثیری در انتخاب مهره دوم ندارد و داریم که

$$P(B_2 \mid W_1) = P(B_2) = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{P(W_1 \cap B_2)}{P(W_1)} = P(B_2)$$

و یا

$$P(W_1 \cap B_2) = P(W_1)P(B_2)$$

در این حالت پیشامدهای فوق را از یکدیگر مستقل گویند.

تعریف ۸.۲ دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل گویند اگر و فقط اگر

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \qquad (۸.۲)$$

مثال ۶.۷.۲ یک ایستگاه آتش نشانی دارای دو ماشین آتش نشان است که به طور مستقل کار می‌کنند و احتمال اینکه یک ماشین آتش‌نشان در موقع نیاز موجود باشد ۰/۹۹ است. احتمال اینکه موقع نیاز حداقل یکی از این دو ماشین موجود باشند را بیابید.

حل اگر $i = 1, 2$ ، A_i پیشامد این باشد که ماشین iام موقع نیاز موجود باشد آنگاه $P(A_1) = P(A_2) = 0/99$ و A_1 و A_2 از یکدیگر مستقل هستند، بنابراین

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)(A_2) = 0/99 + 0/99 - (0/99)^2 = 0/9999$$

استقلال سه پیشامد سه پیشامد A، B و C را مستقل گوئیم اگر و فقط اگر روابط زیر برقرار باشند

۱- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

۲- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

۳- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

۴- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

سه رابطه اول می‌گویند که A و B و C بایستی دو به دو از یکدیگر مستقل باشند.

رابطه استقلال و ناسازگاری دو پیشامد همان طور که در قسمتهای قبل مشاهده کردیم دو پیشامد در صورتی ناسازگار هستند که نتوانند همزمان اتفاق بیفتند و دو پیشامد در صورتی مستقل هستند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند اما تأثیری روی یکدیگر نداشته باشند. حال اگر دو پیشامد بخواهند هم ناسازگار و هم مستقل باشند آنگاه بایستی $P(A \cap B) = 0$ و $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و یا بایستی $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$ باشد.

مثال ۷.۷.۲ یک جفت تاس را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه مجموع اعداد روی دو تاس ۵ و ۱۰ شود را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$A_i =$ پیشامد اینکه در پرتاب iام مجموع ۵ شود

$B_i =$ پیشامد اینکه در پرتاب iام مجموع ۱۰ شود $\qquad i = 1, 2$

در این صورت احتمال مطلوب عبارت است از

$$P((A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) \qquad \text{(به دلیل ناسازگاری)}$$
$$= P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) \qquad \text{(به دلیل استقلال)}$$
$$= \frac{4}{36} \times \frac{3}{36} + \frac{3}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{1}{54}$$

۸.۲ فرمول احتمال بیز و فرمول تفکیک احتمال

یکی از فرمولهای مهم احتمال فرمول احتمال بیز می‌باشد که ابتدا آن را با ذکر یک مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱.۸.۲ فرض کنید ۴۰٪ افراد یک شهر را مردان و ۶۰٪ آنان را زنان تشکیل دهند. همچنین فرض کنید ۵۰٪ از مردان و ۳۰٪ از زنان سیگاری باشند. اگر شخصی از بین افراد سیگاری به تصادف انتخاب شود احتمال اینکه این شخص مرد باشد را بیابید.

حل اگر پیشامدهای زیر را تعریف کنیم

$M =$ پیشامد اینکه شخص انتخابی مرد باشد

$W=$ پیشامد اینکه شخص انتخابی زن باشد

$A=$ پیشامد اینکه شخص انتخابی سیگاری باشد

در این صورت از مفروضات مسأله داریم که

$$P(W)=۰/۶۰ \quad , \quad P(M)=۰/۴۰$$
$$P(A|W)=۰/۳۰ \quad , \quad P(A|M)=۰/۵۰$$

و می‌خواهیم $P(M|A)$ را محاسبه کنیم. برای این منظور داریم که

$$P(M|A)=\frac{P(M\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M)P(A|M)}{P(A)} \qquad (۹.۲)$$

برای محاسبه $P(A)$ با توجه به شکل ۱۰.۲ داریم که $A=(A\cap M)\cup(A\cap W)$

بنابراین

$$P(A)=P(A\cap M)+P(A\cap W)$$
$$=P(M)P(A|M)+P(W)P(A|W)$$

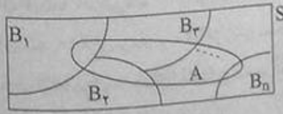
شکل ۱۰.۲

که با توجه به مفروضات مساله $P(A)$ قابل محاسبه است. این فرمول را فرمول تفکیک احتمال گوئیم زیرا با تفکیک پیشامد A به دو پیشامد مجزا، $P(A)$ را قابل محاسبه کردیم. با قرار دادن این مقدار $P(A)$ در فرمول (۹.۲) فرمول زیر که به فرمول احتمال بیز معروف است به دست می‌آید.

$$P(M|A)=\frac{P(M)P(A|M)}{P(M)P(A|M)+P(W)P(A|W)}$$
$$=\frac{(۰/۴۰)(۰/۵۰)}{(۰/۴۰)(۰/۵۰)+(۰/۶۰)(۰/۳۰)}\approx ۰/۵۳$$

برای به دست آوردن فرمول احتمال بیز در حالت کلی، فرض کنید $B_1, B_2, \ldots, B_n$ پیشامدهایی باشند که دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع تمام آنها برابر فضای نمونه S باشد. یعنی

$$B_i\cap B_j=\emptyset \quad \forall i\neq j$$
$$S=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$$



شکل ۱۱.۲ تفکیک پیشامدها

اصطلاحاً پیشامدهای $B_1, B_2, \ldots, B_n$ را یک افراز برای فضای نمونه S گویند و یا گویند فضای نمونه S به پیشامدهای $B_1, B_2, \ldots, B_n$ افراز یا تفکیک شده است. حال اگر A پیشامدی با احتمال مثبت باشد داریم که

$$A=A\cap S=A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

که در آن پیشامدهای $(A\cap B_1), (A\cap B_2), \ldots, (A\cap B_n)$ دو به دو ناسازگار هستند. بنابراین

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots+P(A\cap B_n)\\&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)P(A|B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)\end{aligned} \qquad (۱۰.۲)$$

فرمول فوق را فرمول تفکیک احتمال (و یا فرمول احتمال کل) گویند. همچنین

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (۱۱.۲)$$

فرمول فوق را فرمول احتمال بیز گویند.

مثال ۲.۸.۲ دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است و جعبه دوم شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم می‌اندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم. مطلوب است

الف- احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد را بیابید.

ب- اگر مهره خارج شده از جعبه دوم قرمز باشد، احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه اول سفید بوده باشد را بیابید.

حل اگر پیشامدهای زیر را تعریف کنیم

$W_i=$ پیشامد اینکه از جعبه iام مهره سفید خارج شود

$R_i=$ پیشامد اینکه از جعبه iام مهره قرمز خارج شود $\quad i=1,2$

در این صورت

الف- $P(W_2)$ مورد سئوال است که از فرمول تفکیک احتمال داریم که

$$P(W_2)=P(W_1\cap W_2)+P(R_1\cap W_2)$$

$$=P(W_1)P(W_2|W_1)+P(R_1)P(W_2|R_1)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{17}{40}$$

ب- $P(W_1|R_2)$ مورد سئوال است که از فرمول احتمال بیز داریم که

$$P(W_1|R_2)=\frac{P(W_1)P(R_2|W_1)}{P(W_1)P(R_2|W_1)+P(R_1)P(R_2|R_1)}$$
$$=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}}=\frac{8}{23}$$

مثال ۳.۸.۲ فرض کنید که سه صندوق وجود دارد که هر کدام دارای دو کشو است. در هر یک از کشوهای صندوق اول یک سکه طلا وجود دارد و در یکی از کشوهای صندوق دوم یک سکه طلا و در کشو دیگر آن یک سکه نقره وجود دارد و در هر یک از کشوهای صندوق سوم یک سکه نقره وجود دارد. یکی از صندوقهای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یکی از کشوهای آن را باز می‌کنیم، اگر سکه داخل این کشو طلا باشد احتمال اینکه کشوی دیگر این صندوق نیز شامل سکه طلا باشد را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$B_i =$ پیشامد اینکه صندوق iام انتخاب شود $\quad i=1,2,3$

$A =$ پیشامد اینکه سکه طلا مشاهده گردد

در این صورت

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3},\ P(A|B_1)=1,\ P(A|B_2)=\frac{1}{2},\ P(A|B_3)=0$$

و $P(B_1|A)$ مورد سئوال است. بنابراین از فرمول احتمال بیز داریم که

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0}=\frac{2}{3}$$

مثال ۴.۸.۲ یک موسسه مشاوره‌ای ماشینهای مورد نیازش را از سه آژانس با احتمالهای ۲۰٪ از D، ۲۰٪ از E و ۶۰٪ از F کرایه می‌کند. اگر ۱۰٪ ماشینهای آژانس D، ۱۲٪ ماشینهای آژانس E و ۴٪ از ماشینهای آژانس F لاستیک خراب داشته باشند، مطلوب است

الف- احتمال آنکه موسسه یک ماشین با لاستیک خراب کرایه کرده باشد را بیابید.

ب- اگر ماشین کرایه شده بوسیله موسسه دارای لاستیک خراب باشد احتمال آنکه از آژانس F کرایه کرده باشد را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$B_i =$ پیشامد اینکه موسسه از آژانس نوع iام ماشین کرایه کند $\quad i=D,E,F$

$A =$ پیشامد اینکه ماشین کرایه شده توسط موسسه دارای لاستیک خراب باشد

در این صورت

الف- (فرمول تفکیک احتمال)

$$P(A)=P(B_D\cap A)+P(B_E\cap A)+P(B_F\cap A)$$
$$=P(B_D)P(A|B_D)+P(B_E)P(A|B_E)+P(B_F)P(A|B_F)$$
$$=(0/20)(0/10)+(0/20)(0/12)+(0/60)(0/04)=0/068$$

ب- (فرمول بیز)

$$P(B_F|A)=\frac{P(B_F)P(A|B_F)}{P(A)}=\frac{(0/60)(0/04)}{0/068}=\frac{6}{17}$$

۹.۲ مسائل حل شده

مثال ۱.۹.۲ سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم اگر شیر آمد آن سکه را یک بار دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر خط آمد یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه حاصل از این آزمایش را معین کنید و پیشامد A مربوط به مشاهده عدد کمتر از ۴ در پرتاب تاس را مشخص کنید.

حل

$$S=\{(H,T),(H,H),(T,1),(T,2),\ldots,(T,6)\}$$
$$A=\{(T,1),(T,2),(T,3)\}$$

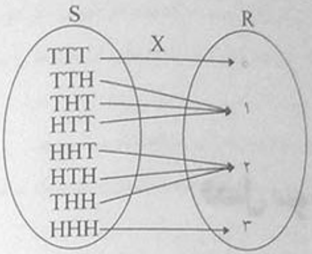
مثال ۲.۹.۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد باشند. پیشامدهای زیر را برحسب این سه پیشامد یا متمم‌های آنها بنویسید

الف- فقط A اتفاق بیفتد.

ب- حداکثر دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتد.

ج- حداقل دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتند.

د- دقیقاً دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتند.



$X : S \to R$

$X(THT)=۱$

$X(HTH)=۲$

$\vdots \quad \vdots$

تعریف ۳.۱. یک متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد. برای نمایش متغیر تصادفی از یکی از حروف بزرگ مانند X، Y و... استفاده می‌شود و برای نمایش یکی از مقادیری که متغیر تصادفی اختیار می‌کند از حروف کوچک معادل آن یعنی x، y و... استفاده می‌شود. مجموعه مقادیر و یا برد متغیر تصادفی X را با S_X نمایش می‌دهند و آن را تکیه گاه X گویند.

با استفاده از متغیرهای تصادفی می‌توان کلیه مباحث احتمال که در فصل قبل بیان شد را به نحو ساده‌تری بیان کرد و این مباحث را نیز تعمیم داد. برای مثال در مثال ۱.۱.۳ در صورتی که گفته شود متغیر تصادفی X دارای مقدار ۲ است، که آن را با مجموعه $\{\omega \in S \mid X(\omega)=۲\}$ و یا به طور ساده‌تر با نماد $(X=۲)$ نمایش می‌دهند، به این معنی است که یکی از اعضای پیشامد $A=\{HHT, HTH, THH\}$ را مشاهده کرده‌ایم و بنابراین $(X=۲)$ یک پیشامد است و می‌توان احتمال آن را به صورت زیر محاسبه کرد. $P(X=۲)=P(A)=\frac{۳}{۸}$. همچنین $(X\le ۱)$ معادل پیشامد $B=\{TTT, TTH, THT, HTT\}$ است و بنابراین $P(X\le ۱)=P(B)=\frac{۴}{۸}$ و یا $A\equiv(X=۲)=(X\in(۱/۵,۲/۵])$ بنابراین $P(X\in(۱/۵,۲/۵])=P(X=۲)=\frac{۳}{۸}$.

توجه توجه کنید که برای هر زیر مجموعه C از اعداد حقیقی منظور از $(X\in C)$ پیشامد این است که مقادیر متغیر تصادفی X در مجموعه C قرار گیرند.

در زیر چند مثال از متغیرهای تصادفی می‌آوریم.

مثال ۲.۱.۳ سه مهره به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ را در ۳ جعبه به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ به طور تصادفی می‌ریزیم به گونه‌ای که هر جعبه تنها شامل یک مهره باشد. اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد جورها

(تعداد مهره‌هایی که در جعبه با شماره متناظر خودشان قرار گرفته‌اند) باشد، مطلوب است

الف- احتمال اینکه دقیقاً یک جور داشته باشیم را بیابید.

ب- احتمال اینکه حداقل دو جور داشته باشیم را بیابید.

حل فهرست نقاط فضای نمونه که عبارت از قرار گرفتن سه مهره ۱، ۲ و ۳ در جعبه‌ها می‌باشد و مقادیری که متغیر تصادفی X به نقاط نسبت می‌دهد عبارت است از

S	۱۲۳	۱۳۲	۲۱۳	۲۳۱	۳۱۲	۳۲۱
x	۳	۱	۱	۰	۰	۱

بنابراین $S_X=\{۰,۱,۳\}$ و در نتیجه

الف- $P(X=۱)$ مورد سئوال است پس $P(X=۱)=P(\{۱۳۲,۲۱۳,۳۲۱\})=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ب- $P(X\ge ۲)$ مورد سئوال است پس $P(X\ge ۲)=P(X=۳)=P(\{۱۲۳\})=\frac{۱}{۶}$

مثال ۳.۱.۳ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک خط مشاهده کنیم و سپس توقف می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی M برابر تعداد پرتابهای لازم تا رسیدن به یک خط باشد، احتمال اینکه حداقل ۴ پرتاب لازم باشد را بیابید.

حل فهرست نقاط فضای نمونه، مقادیری که متغیر تصادفی M به این نقاط نسبت می‌دهد و احتمالات مربوطه عبارت است از

S	T	HT	HHT	$HHHT$	....
M	۱	۲	۳	۴	....
احتمالات	$\frac{۱}{۳}$	$(\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})$	$(\frac{۲}{۳})^۲(\frac{۱}{۳})$	$(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})$	....

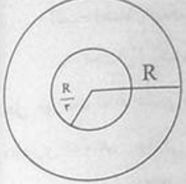
در اینجا $S_M=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ و $P(M\ge ۴)$ مورد سئوال است بنابراین

$$P(M\ge ۴)=P(M=۴)+P(M=۵)+...$$

$$=(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})+(\frac{۲}{۳})^۴(\frac{۱}{۳})+...=\frac{(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})}{۱-\frac{۲}{۳}}=(\frac{۲}{۳})^۳=\frac{۸}{۲۷}$$

مثال ۴.۱.۳ از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی Y

را برابر فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره کمتر از $\frac{۱}{۳}$ شعاع دایره باشد را بیابید.



حل در اینجا $S_Y=[۰,R]$ و $P(Y<\frac{R}{۳})$ مورد سئوال است. بنابراین

$$P(Y<\frac{R}{۳})=\frac{\text{مساحت دایره به شعاع } \frac{R}{۳}}{\text{مساحت دایره به شعاع } R}=\frac{\pi\left(\frac{R}{۳}\right)^۲}{\pi R^۲}=\frac{۱}{۹}$$

متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشد را متغیر تصادفی گسسته و متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند. برای مثال، متغیرهای تصادفی مثالهای ۲.۱.۳ و ۳.۱.۳ از نوع گسسته و متغیر تصادفی مثال ۴.۱.۳ از نوع پیوسته می‌باشد.

در بخشهای بعد توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته را می‌آوریم.

۲.۳ توزیع احتمالات گسسته

در مثال ۲.۱.۳ چون $(X=x)$ یک پیشامد است پس می‌توان احتمال این پیشامد را محاسبه کرد. مثلاً احتمال پیشامد $(X=۰)$ برابر احتمال پیشامد $A=\{۲۳۱,۳۱۲\}$ است که برابر $\frac{۲}{۶}$ است یعنی $P(X=۲)=P(A)=\frac{۲}{۶}$. با به دست آوردن احتمالات دیگر مربوط به نقاط ۱ و ۳ از مجموعه مقادیر متغیر تصادفی X یعنی $S_X=\{۰,۱,۳\}$ جدول زیر که به جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X موسوم است را به دست می‌آوریم

x	۰	۱	۳
$P(X=x)$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۳}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

جدول فوق یک تابع از S_X به اعداد حقیقی در فاصله $[۰,۱]$ برقرار می‌کند که آن را با تابع $f_X(x)$ نمایش داده و به آن تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند، بنابراین

$$f_X(x)=P(X=x)$$

این تابع یک تابع غیر منفی است و مجموع آن روی کلیه مقادیری که می‌تواند اختیار کند برابر ۱ است.

تعریف ۲.۳ تابع $f_X(x)=P(X=x)$ را تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند هر گاه

۱- برای هر $x\in R$ داشته باشیم که $f_X(x)\geq ۰$

۲- $\sum_{x\in R} f_X(x)=۱$

برای محاسبه احتمال پیشامد $(X\in C)$ که C زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P(X\in C)=\sum_{x\in C} f_X(x) \qquad (۱.۳)$$

مثال ۱.۲.۳ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر مجموع اعداد روی دو تاس مشاهده شده در نظر می‌گیریم.

الف- تابع احتمال X را به دست آورید.

ب- احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۴ شود را بیابید.

ج- احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس بین ۶ و ۹ شود را بیابید.

حل الف- تکیه گاه X برابر $S_X=\{۲,۳,۴,\dots,۱۲\}$ است و برای مثال

$$P(X=۴)=P(\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\})=\frac{۳}{۳۶}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر S_X تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید.

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

ب- $P(X\leq ۴)$ مورد سئوال است بنابراین از فرمول (۱.۳) داریم که

$$P(X\leq ۴)=f_X(۲)+f_X(۳)+f_X(۴)=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج- با استفاده از فرمول (۱.۳) داریم که

$$P(۶<X<۹)=f_X(۷)+f_X(۸)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۵}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

مثال ۲.۲.۳ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_Y(y)=k\left(\frac{1}{6}\right)^y \qquad y=0,1,2,\dots$$

الف- مقدار k را چنان تعیین کنید که $f_Y(y)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته Y باشد.

ب- احتمالات زیر را محاسبه کنید $\quad P(Y\le \frac{5}{2}) \quad , \quad P(Y\ge \frac{11}{3})$

حل الف- با توجه به تعریف ۲.۳ بایستی $k\ge 0$ و همچنین

$$1=\sum_{y=0}^{+\infty} f_Y(y)=\sum_{y=0}^{+\infty}k\left(\frac16\right)^y=k\left[1+\frac16+\left(\frac16\right)^2+\dots\right]=k\left[\frac{1}{1-\frac16}\right]=k\left(\frac65\right)$$

بنابراین بایستی $k=\frac56$ باشد.

ب- با استفاده از فرمول (۱.۳) داریم که

$$P(Y\le\frac52)=f_Y(0)+f_Y(1)+f_Y(2)=\frac56\left[1+\frac16+\frac1{36}\right]=\frac56\times\frac{43}{36}=\frac{215}{216}$$

$$P(Y\ge\frac{11}{3})=\sum_{y=4}^{+\infty} f_Y(y)=\sum_{y=4}^{+\infty}\left(\frac56\right)\left(\frac16\right)^y=\frac{\frac56\left(\frac16\right)^4}{1-\frac16}=\left(\frac16\right)^4=\frac1{1296}$$

مثال ۳.۲.۳ فرمولی برای تابع احتمال تعداد شیر وقتی سکه‌ای را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم به دست آورید.

حل در اینجا فضای نمونه دارای $n(S)=2^4$ عضو هم شانس است. اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه در نظر بگیریم در این صورت $S_X=\{0,1,2,3,4\}$ و $P(X=x)$ به این معنی است که در ۴ مرتبه پرتاب سکه می‌خواهیم x شیر مشاهده کنیم که تعداد حالات مساعد آن برابر $\binom{4}{x}$ است. بنابراین

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}}{2^4} \qquad x=0,1,2,3,4$$

تابع توزیع (تجمعی)

تعریف ۳.۳ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه تابع توزیع (تجمعی) X که با نماد $F_X(x)$ نمایش داده می‌شود، برای هر $x\in R$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f_X(t) \qquad (۲.۳)$$

مثال ۴.۲.۳ در مثال ۲.۱.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورید.

حل در قسمت قبل دیدیم که تابع احتمال متغیر تصادفی مثال ۲.۱.۳ عبارت است از

x	0	1	3
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

برای محاسبه تابع توزیع ابتدا آن را در چند نقطه دلخواه محاسبه می‌کنیم.

$$F_X(0/5)=P(X\le 0/5)=\sum_{t\le 0/5} f_X(t)=f_X(0)=\frac26$$

$$F_X(2/3)=P(X\le 2/3)=\sum_{t\le 2/3} f_X(t)=f_X(0)+f_X(1)=\frac26+\frac36=\frac56$$

به راحتی دیده می‌شود که برای هر $x<0$، $F_X(x)=0$ و برای هر $0\le x<1$، $F_X(x)=\frac26$ و....

بنابراین با انجام محاسبات تابع توزیع X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac26 & 0\le x<1\\ \frac56 & 1\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

مثال ۵.۲.۳ در مثال ۳.۲.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورده و تابع احتمال و تابع توزیع را رسم کنید.

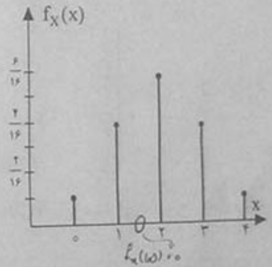
حل فرم جدولی تابع احتمال مثال ۳.۲.۳ به صورت زیر می‌باشد.

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

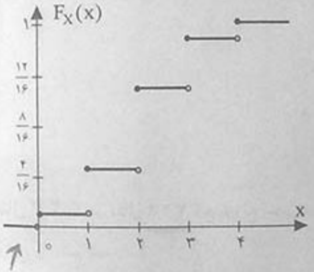
بنابراین با انجام عملیات مشابه مثال قبل تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{16} & 0\le x<1\\ \frac{5}{16} & 1\le x<2\\ \frac{11}{16} & 2\le x<3\\ \frac{15}{16} & 3\le x<4\\ 1 & 4\le x\end{cases}$$

معمولاً نمودار تابع احتمال را به صورت یک نمودار میله‌ای رسم می‌کنند و نمودار تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته یک تابع پله‌ای است که این دو نمودار در زیر رسم شده‌اند.



نمودار میله‌ای تابع احتمال مثال ۵.۲.۳



نمودار پله‌ای تابع توزیع مثال ۵.۲.۳

خواص تابع توزیع با توجه به تعریف تابع توزیع و همچنین با توجه به نمودار بالا خواص زیر را در مورد تابع توزیع می‌توان بیان کرد.

الف- برای هر $x\in R$، $0\le F_X(x)\le 1$.

ب- تابع توزیع یک تابع غیرنزولی است یعنی

$$x_1<x_2 \Rightarrow F_X(x_1)\le F_X(x_2)$$

ج-

$$F_X(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$$
$$F_X(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F_X(x)=1$$

د- تابع توزیع همواره از سمت راست پیوسته است یعنی

$$\lim_{x\to a^+}F_X(x)=F_X(a)$$

توجه کنید که از روی تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته می‌توان تابع احتمال آن را توسط فرمول زیر به دست آورد.

$$f_X(x)=F_X(x)-F_X(x^-) \qquad (۳.۳)$$

که در آن $F_X(x^-)$ حد سمت چپ تابع توزیع در نقطه x است یعنی

$$F_X(x^-)=\lim_{t\to x^-}F_X(t)$$

مثلاً در مثال ۵.۲.۳ داریم که

$$f_X(2)=F_X(2)-F_X(2^-)=\frac{11}{16}-\frac{5}{16}=\frac{6}{16}$$

و همچنین

$$f_X(1.5)=F_X(1.5)-F_X(1.5^-)=\frac{5}{16}-\frac{5}{16}=0$$

همچنین توجه کنید که هر نوع احتمالی را می‌توان توسط تابع توزیع از فرمولهای زیر محاسبه کرد:

۱- $P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$

۲- $P(a<X<b)=F_X(b^-)-F_X(a)$

۳- $P(a\le X<b)=F_X(b^-)-F_X(a^-)$

۴- $P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a^-)$

۵- $P(X>a)=1-F_X(a)$

۶- $P(X=b)=F_X(b)-F_X(b^-)$

مثال ۶.۲.۳ یک کلاس آمار ۸ شاگرد دارد که ۵ نفر آنها ۱۹ ساله و ۳ نفر آنها ۲۱ ساله هستند. از این کلاس ۲ شاگرد به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر میانگین سن ۲ شاگرد انتخابی در نظر می‌گیریم. تابع احتمال و تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورده و $P(19<X<21)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $S_X=\{19,20,21\}$ و

$$f_X(19)=P(X=19)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}$$

$$f_X(20)=P(X=20)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}\quad,\quad f_X(21)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

بنابراین تابع احتمال X برابر است با

x	۱۹	۲۰	۲۱
$f_X(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

و در نتیجه تابع توزیع X به صورت زیر به دست می‌آید

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<19\\ \frac{10}{28} & 19\le x<20\\ \frac{25}{28} & 20\le x<21\\ 1 & 21\le x\end{cases}$$

برای محاسبه $P(19<X<21)$ به دو صورت زیر می‌توان عمل کرد.

$$P(19<X<21)=f_X(20)=\frac{15}{28}$$
$$P(19<X<21)=F_X(21^-)-F_X(19)=\frac{25}{28}-\frac{10}{28}=\frac{15}{28}$$

۳.۳ توزیع احتمالات پیوسته

متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته گویند. در مورد متغیر تصادفی پیوسته بایستی توجه کرد که احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته بخواهد فقط یک مقدار بخصوص از مجموعه مقادیرش را بگیرد برابر صفر است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۳.۳ نقطه‌ای را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی $[0,2]$ انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر نقطه انتخاب شده در فاصله $[0,2]$ در نظر می‌گیریم. در این صورت X یک متغیر تصادفی پیوسته است و برای هر $r\in[0,2]$، $P(X=r)=0$ زیرا بین نقاط ۰ و ۲ بی‌نهایت نقطه وجود دارد و احتمال انتخاب یک نقطه بخصوص بسیار ناچیز است.

در حالت کلی اگر b هر عدد حقیقی و X هر متغیر تصادفی پیوسته باشد آنگاه $P(X=b)=0$ و در نتیجه $P(a<X\le b)=P(a<X<b)+P(X=b)=P(a<X<b)$

بنابراین توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته را نمی‌توان به صورت یک جدول نمایش داد. در این حالت توزیع احتمال متغیر تصادفی پیوسته X را به صورت یک تابع $f_X(x)$ نمایش داده و آن را

تابع چگالی احتمال X می‌نامند.

برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته معمولاً ابتدا تابع توزیع آن را به دست می‌آورند، زیرا تابع توزیع احتمال را در فواصل محاسبه می‌کند و محاسبه این احتمالات در حالت پیوسته امکان‌پذیر است. تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته X به صورت $F_X(x)=P(X\le x)$ تعریف می‌شود. با توجه به آنکه در حالت گسسته تابع توزیع به صورت $F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f_X(t)$ محاسبه می‌شد، با قرار دادن تابع چگالی احتمال به جای تابع احتمال و تبدیل مجموع به انتگرال می‌توان تابع توزیع در حالت پیوسته را به طور مشابه و به صورت زیر محاسبه کرد:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \qquad (4.3)$$

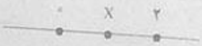
تابع $f_X(x)$ که در رابطه (۴.۳) صدق می‌کند را تابع چگالی احتمال و تابع $F_X(x)$ در این رابطه را تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X گویند. همچنین با توجه به قضیه اساسی حساب از رابطه (۴.۳) نتیجه می‌شود که

$$F'_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x) \qquad (5.3)$$

با توجه به روابط (۴.۳) و (۵.۳) با داشتن تابع توزیع X و مشتق گرفتن از آن به راحتی می‌توان تابع چگالی احتمال X را به دست آورد و برعکس با داشتن تابع چگالی احتمال X و انتگرال گرفتن از آن می‌توان تابع توزیع X را به دست آورد.

مثال ۲.۳.۳ در مثال ۱.۳.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X را به دست آورده و از روی آن تابع چگالی احتمال X را محاسبه کنید و سپس این دو تابع را رسم کنید.

حل با توجه به نمودار روبرو و مفهوم تابع توزیع



اگر $x<0$ آنگاه $F_X(x)=P(X\le x)=0$ و اگر $0\le x<2$ آنگاه

$$F_X(x)=P(X\le x)=\frac{\text{طول فاصله } [0,x]}{\text{طول فاصله } [0,2]}=\frac{x}{2}$$

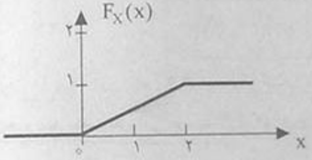
و اگر $x\ge 2$ آنگاه $F_X(x)=P(X\le x)=1$. بنابراین

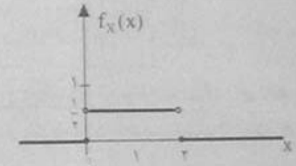
$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{2} & 0\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

و در نتیجه

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

نمودار این دو تابع در زیر رسم شده است. همان طور که دیده می‌شود نمودار تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته یک نمودار پیوسته است.





خواص تابع چگالی احتمال و تابع توزیع با توجه به روابط (۴.۳) و (۵.۳) بین تابع چگالی احتمال و تابع توزیع می‌توان خواص زیر را برای تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ بیان کرد.

الف- برای هر $x\in R$، $f_X(x)\ge 0$

ب- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

همچنین تمامی خواص گفته شده برای تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته در بخش ۲.۳، برای تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته برقرار است و علاوه بر آن در حالت پیوسته این تابع همواره پیوسته است.

برای محاسبه احتمالات مربوط به یک متغیر تصادفی پیوسته می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد

$$P(a<X\le b)=\int_a^b f_X(x)dx=F_X(b)-F_X(a) \qquad (6.3)$$

که در آن a می‌تواند $-\infty$ و b می‌تواند $+\infty$ باشد.

مثال ۳.۳.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^2} & 1<x<10\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع توزیع X را به دست آورید.

ج- احتمالات زیر را محاسبه کنید

$$P(X>2)\quad,\quad P(1<X\le 5)\quad,\quad P([X]=3)$$

حل الف- با توجه به خواص تابع چگالی احتمال بایستی $c\ge 0$ و همچنین

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx+\int_{1}^{10} f_X(x)dx+\int_{10}^{+\infty} f_X(x)dx$$

$$=0+\int_1^{10}\frac{c}{x^2}dx+0=\frac{-c}{x}\Big|_1^{10}=-\frac{c}{10}+c=\frac{9}{10}c$$

پس بایستی $c=\frac{10}{9}$ باشد.

ب- اگر $x<1$ آنگاه $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=0$ و اگر $1\le x<10$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt+\int_1^x f_X(t)dt=0+\int_1^x\frac{10}{9t^2}dt=\frac{-10}{9t}\Big|_1^x=\frac{-10}{9x}+\frac{10}{9}$$

و اگر $x\ge 10$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt+\int_1^{10} f_X(t)dt+\int_{10}^{x} f_X(t)dt=0+1+0=1$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{x}\right) & 1\le x<10\\ 1 & 10\le x\end{cases}$$

ج- با توجه به رابطه (۶.۳) داریم که

$$P(X>2)=\int_2^{+\infty} f_X(x)dx=\int_2^{10}\frac{10}{9x^2}dx=\frac{-10}{9x}\Big|_2^{10}=\frac{-1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

$$P(1<X\le 5)=F_X(5)-F_X(1)=\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{5}\right)-0=\frac{8}{9}$$

$$P([X]=3)=P(3\leq X<4)=F_X(4)-F_X(3)=\frac{10}{9}(1-\frac{1}{4})-\frac{10}{9}(1-\frac{1}{3})=\frac{5}{54}$$

مثال ۴.۳.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases} cx^2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع توزیع X را به دست آورید و $P(X>5)$ را محاسبه کنید.

حل الف- با توجه به خواص تابع چگالی بایستی $c\geq 0$ و همچنین با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء داریم که

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=c\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=c\left[\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right]e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=0-(-\frac{c}{4})=\frac{c}{4}$$

بنابراین بایستی $c=4$ باشد (توجه کنید که برای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $\alpha>0$ داریم که $\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-\alpha x}=0$)

ب- اگر $x<0$ آنگاه $F_X(x)=0$ و اگر $x\geq 0$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\int_0^x 4t^2e^{-2t}dt=4\left[-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right]e^{-2t}\Big|_0^x$$

$$=1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-(2x^2+2x+1)e^{-2x} & x\geq 0 \end{cases}$$

و در نتیجه

$$P(X>5)=1-P(X\leq 5)=1-F_X(5)=61e^{-10}=0/003$$

۴.۳ توزیع احتمالات توأم دو متغیره

در بخش‌های قبل متغیرهای تصادفی مورد مطالعه یک بعدی بودند. در بعضی از مسائل ممکن است که نتایجی از چندین متغیر تصادفی را به طور همزمان لازم داشته باشیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۴.۳ فرض کنید سکه‌ای را ۳ مرتبه پرتاب کنیم و قرار دهیم:

$X=$ تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ مرتبه پرتاب سکه

$Y=$ تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سوم سکه

حال پیشامدهای $(X=1)$ و $(Y=1)$ را در نظر بگیرید. اگر وقوع این دو پیشامد در یکدیگر تأثیری داشته باشد آنگاه دانستن تابع احتمال $f_X(x)=P(X=x)$ و $f_Y(y)=P(Y=y)$ به تنهایی تمام اطلاعات را در مورد متغیرهای تصادفی X و Y به ما می‌دهد. اما همانطور که دیده می‌شود وقوع هر یک از این دو پیشامد در دیگری تأثیر می‌گذارد و بنابراین نیاز به دانستن اطلاعاتی در مورد وقوع همزمان این دو پیشامد داریم.

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند توزیع احتمال برای وقوع همزمان آنها به صورت تابع دو متغیره $f_{X,Y}(x,y)$ نشان داده می‌شود و معمولاً آن را توزیع احتمال توأم X و Y گویند (اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند این تابع به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$f_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y) \qquad (7.3)$$

یعنی $f_{X,Y}(x,y)$ احتمال این است که نتایج x و y به طور همزمان اتفاق بیفتند. مثلاً در مثال ۱.۴.۳، $f_{X,Y}(1,1)=P(X=1,Y=1)$ به معنای احتمال این است که در ۳ مرتبه پرتاب سکه دقیقاً در پرتاب سوم یک شیر مشاهده کنیم که این احتمال برابر $\frac{1}{8}$ است. با توجه به رابطه (۷.۳) تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴.۳ تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y گویند هرگاه

الف- برای هر x و y داشته باشیم $f_{X,Y}(x,y)\geq 0$

ب- $\sum_x\sum_y f_{X,Y}(x,y)=1$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (X,Y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P((X,Y)\in A)=\sum\sum_{(x,y)\in A}f_{X,Y}(x,y) \qquad (8.3)$$

مثال ۲.۴.۳ در مثال ۱.۴.۳ تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $P((X,Y)\in A)$ را محاسبه کنید که در آن $A=\{(x,y)\mid x\le y\}$.

حل توجه کنید که $S_X=\{0,1,2,3\}$ و $S_Y=\{0,1\}$ بنابراین

$$f_{X,Y}(0,0)=P(X=0,Y=0)=P(\{TTT\})=\frac{1}{8}$$
$$f_{X,Y}(0,1)=P(X=0,Y=1)=0$$
$$f_{X,Y}(1,0)=P(X=1,Y=0)=P(\{HTT,THT\})=\frac{2}{8}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر، جدول زیر را که به جدول توزیع احتمالات توأم X و Y موسوم است به دست می‌آوریم.

y \ x	۰	۱	۲	۳
۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰
۱	۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

توجه کنید که

$$\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{1} f_{X,Y}(x,y)=1$$

چون $A=\{(x,y)\mid x\le y\}=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ بنابراین با توجه به رابطه (۸.۳) داریم که

$$P(X\le Y)=f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(1,1)=\frac{1}{8}+0+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

مثال ۳.۴.۳ از داخل جعبه‌ای که شامل ۳ توپ آبی، ۲ توپ قرمز و ۴ توپ سبز است، دو توپ به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم

X = تعداد توپهای آبی مشاهده شده در ۲ توپ انتخابی

Y = تعداد توپهای قرمز مشاهده شده در ۲ توپ انتخابی

الف- تابع احتمال توأم (X,Y) را به دست آورید.

ب- $P(X+Y\le 1)$ را محاسبه کنید.

حل الف- توجه کنید که $S_X=S_Y=\{0,1,2\}$ و برای مثال $f_{X,Y}(0,0)$ به معنای احتمال این است که در ۲ توپ انتخابی ما هیچ توپ آبی، هیچ توپ قرمز و ۲ توپ سبز داشته باشیم که احتمال آن

برابر است با

$$f_{X,Y}(0,0)=P(X=0,Y=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{6}{36}$$

به همین ترتیب

$$f_{X,Y}(0,1)=P(X=0,Y=1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=\frac{8}{36}$$

$$f_{X,Y}(1,0)=P(X=1,Y=0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=\frac{12}{36}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید.

y \ x	۰	۱	۲
۰	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$
۱	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	۰
۲	$\frac{1}{36}$	۰	۰

جدول ۱.۳ جدول توزیع احتمالات توأم

توجه کنید که تابع احتمال توأم X و Y را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{2-x-y}}{\binom{9}{2}}\qquad x,y=0,1,2\ ,\ 0\le x+y\le 2$$

ب- با توجه به رابطه (۸.۳) داریم که

$$P(X+Y\le 1)=f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(1,0)=\frac{6}{36}+\frac{8}{36}+\frac{12}{36}=\frac{26}{36}$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته تعریف زیر را داریم.

تعریف ۵.۳ تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y گویند هرگاه

الف- برای هر x و y داشته باشیم $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$.

ب- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$.

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (X,Y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\boxed{P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy} \qquad (۹.۳)$$

مثال ۴.۴.۳ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(1+2y) & 0<x<3 \,,\; 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y باشد.

ب- $P(1<X<2, 0<Y<\frac{1}{2})$ و $P(X+2Y\geq 3)$ را محاسبه کنید.

حل الف- با توجه به خواص تابع چگالی احتمال توأم، بایستی $c \geq 0$ و همچنین

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^3 cx(1+2y)\,dx\,dy$$

$$= c\int_0^1 (1+2y)\left[\int_0^3 x\,dx\right]dy = c\int_0^1 (1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 dy$$

$$= \frac{9}{2}c\int_0^1 (1+2y)\,dy = \frac{9}{2}c\,\left[y+y^2\right]_0^1 = 9c$$

بنابراین بایستی $c=\frac{1}{9}$ باشد.

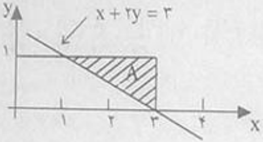
ب- با توجه به رابطه (۹.۳) داریم که

$$P(1<X<2, 0<Y<\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_1^2 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{2}} (1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 dy = \frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1+2y)\,dy$$

$$= \frac{1}{6}\left[y+y^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

برای محاسبه $P(X+2Y\geq 3)$ ابتدا بایستی ناحیه $A=\{(x,y)\mid x+2y\geq 3\}$ را مشخص کنیم. با توجه به نمودار زیر داریم که



$$A = \{(x,y)\mid 1<x<3, \frac{3-x}{2}<y<1\}$$
$$= \{(x,y)\mid 3-2y<x<3, 0<y<1\}$$

بنابراین

$$P(X+2Y\geq 3) = \int_0^1\int_{3-2y}^3 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dx\,dy = \frac{1}{9}\int_0^1 (1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{3-2y}^3 dy$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^1 (1+2y)(3y-y^2)\,dy$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}y^2+\frac{5}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right]_0^1 = \frac{2}{9}\times\frac{8}{3} = \frac{16}{27}$$

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (کناری)

با داشتن تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم متغیرهای تصادفی X و Y می‌توان تابع احتمال (چگالی احتمال) X به تنهایی و Y به تنهایی را محاسبه کرد که به آنها توابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای گویند. اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\boxed{f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) \quad , \quad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)} \qquad (۱۰.۳)$$

و اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \;\; , \;\; f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx} \qquad (۱۱.۳)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که توابع به دست آمده در (۱۰.۳) و (۱۱.۳) تمامی خواص تابع احتمال و تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی X و Y را دارند.

مثال ۵.۴.۳ در مثال ۳.۴.۳ تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y را به دست آورید.

حل با توجه به اینکه $S_X = S_Y = \{0, 1, 2\}$ بنابراین با توجه به جدول ۱.۳ و رابطه (۱۰.۳) داریم که

$$f_X(0) = \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(0,y) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(0,2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

$$f_X(1) = \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(1,y) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}$$

$$f_X(2) = \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(2,y) = \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{3}{36}$$

بنابراین تابع احتمال حاشیه‌ای X عبارت است از

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

به همین ترتیب تابع احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آید.

y	0	1	2
$f_Y(y)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$

می‌توان عملیات فوق را در جدول توزیع احتمالات توأم به صورت زیر خلاصه کرد

y \ x	0	1	2	$f_Y(y)$
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_X(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

توزیع احتمالات شرطی

در فصل دوم احتمال شرطی را به صورت زیر تعریف کردیم

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) \neq 0$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند و قرار دهیم $A \equiv (X=x)$ و $B \equiv (Y=y)$ در این صورت

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) \neq 0$$

به سادگی می‌توان نشان داد که تابع $\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ به عنوان تابعی از x برای y ثابت، تمامی شرایط یک تابع احتمال را دارد که به آن تابع احتمال شرطی X به شرط Y=y گویند و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهند.

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) \neq 0 \qquad (12.3)$$

به همین ترتیب تابع احتمال شرطی Y به شرط X=x به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x) \neq 0 \qquad (13.3)$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، به طور مشابه تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط Y=y توسط رابطه (۱۲.۳) و تابع چگالی احتمال شرطی Y به شرط X=x توسط رابطه (۱۳.۳) تعریف می‌شوند. همچنین برای محاسبه احتمالات شرطی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$P(a < X < b \mid Y=c) = \begin{cases} \sum_{a<x<b} f_{X|Y}(x \mid c) & \text{اگر X و Y گسسته باشند} \\ \int_a^b f_{X|Y}(x \mid c)\,dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند} \end{cases} \qquad (14.3)$$

مثال ۶.۴.۳ در مثال ۳.۴.۳ تابع احتمال شرطی X به شرط Y=0 را به دست آورده و $P(X \leq 1 \mid Y=0)$ را محاسبه کنید.

حل با توجه به رابطه (۱۲.۳) داریم که

$$f_{X|Y}(x \mid 0) = \frac{f_{X,Y}(x,0)}{f_Y(0)} = \frac{f_{X,Y}(x,0)}{\frac{21}{36}} \qquad x = 0, 1, 2$$

بنابراین با توجه به جدول ۱.۳ داریم که

x	0	1	2
$f_{X\mid Y}(x\mid 0)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{3}{21}$

و از رابطه (۱۴.۳) نتیجه می‌شود که

$$P(X\le 1\mid Y=0)=\sum_{x=0}^{1} f_{X\mid Y}(x\mid 0)=\frac{6}{21}+\frac{12}{21}=\frac{6}{7}$$

مثال ۷.۴.۳ در مثال ۴.۴.۳ توابع چگالی احتمال $f_X(x)$، $f_Y(y)$ و $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ را به دست آورده و $P(1<X<2\mid Y=\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

حل با توجه به رابطه (۱۱.۳) داریم که

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dy=\frac{1}{9}x\left[y+y^2\right]_0^1=\frac{2}{9}x$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^3 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dx=\frac{1}{9}(1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{1}{2}(1+2y)$$

بنابراین

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & 0<x<3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}\quad,\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+2y) & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

همچنین از رابطه (۱۲.۳) داریم که

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{9}x(1+2y)}{\frac{1}{2}(1+2y)}=\frac{2}{9}x$$

بنابراین

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & 0<x<3\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

و با توجه به رابطه (۱۴.۳) داریم که

$$P(1<X<2\mid Y=\tfrac{1}{2})=\int_1^2 f_{X\mid Y}(x\mid \tfrac{1}{2})\,dx=\int_1^2 \frac{2}{9}x\,dx=\frac{1}{9}x^2\Big|_1^2=\frac{1}{3}$$

متغیرهای تصادفی مستقل در مثال ۷.۴.۳ دیده می‌شود که $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ به y بستگی نداشت و در حقیقت $f_{X\mid Y}(x\mid y)=f_X(x)$. در این حالت متغیر تصادفی Y تأثیری روی متغیر تصادفی X ندارد و گویند این دو متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل هستند. در این حالت داریم که

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=f_X(x)\Rightarrow \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)\Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

تعریف ۶.۳ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y را از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و فقط اگر

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\qquad \text{برای هر } x,y \tag{۱۵.۳}$$

برای مثال متغیرهای تصادفی مثال ۴.۴.۳ از یکدیگر مستقل هستند زیرا برای آنها رابطه (۱۵.۳) برقرار است (مثال ۷.۴.۳ را ملاحظه کنید) ولی متغیرهای تصادفی مثال ۳.۴.۳ از یکدیگر مستقل نیستند زیرا در این مثال داریم که

$$f_X(0)=\frac{15}{36}\quad,\quad f_Y(0)=\frac{21}{36}\quad,\quad f_{X,Y}(0,0)=\frac{6}{36}$$

و بنابراین $f_{X,Y}(0,0)\neq f_X(0)f_Y(0)$

مثال ۸.۴.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}cxy & 0<y<2x^2\ ,\ 0<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- $P(X+Y<1)$ را محاسبه کنید.

ج- $P(0<Y<\frac{1}{3}\mid X=\frac{1}{2})$ و $P(\frac{1}{2}<X<1\mid Y=\frac{1}{3})$ را محاسبه کنید.

د- آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

حل الف- در این مثال کران متغیرهای X و Y به یکدیگر وابسته است و ناحیه‌ای را که می‌توان روی آن انتگرال گرفت عبارت است از

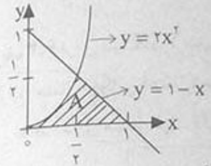
$$B=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<2x^2\}=\{(x,y)\mid \sqrt{\frac{y}{2}}<x<1,\ 0<y<2\}$$

بنابراین بایستی $c\ge 0$ و همچنین

$$1=\int_0^1\int_0^{2x^2} cxy\,dy\,dx=c\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x^2}dx=2c\int_0^1 x^5\,dx$$

$$=\frac{c}{3}x^6\Big|_0^1=\frac{c}{3}\quad\Rightarrow\quad c=3$$

ب- برای محاسبه احتمال بایستی ناحیه $A=\{(x,y)\mid x+y<1\}$ را معین کنیم. با توجه به نمودار زیر داریم که



$$A=\{(x,y)\mid \sqrt{\frac{y}{2}}<x<1-y,\ 0<y<\frac{1}{2}\}$$

بنابراین

$$P(X+Y<1)=\int_0^{\frac12}\int_{\sqrt{\frac y2}}^{1-y} 3xy\,dx\,dy = 3\int_0^{\frac12} y\left[\frac12 x^2\right]_{\sqrt{\frac y2}}^{1-y}dy$$

$$=\frac32\int_0^{\frac12} y\left(1-\frac52 y+y^2\right)dy$$

$$=\frac32\left[\frac12 y^2-\frac56 y^3+\frac14 y^4\right]_0^{\frac12}=\frac{7}{128}$$

ج- ابتدا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای و شرطی را به دست می‌آوریم (به حدود انتگرالها و توابع توجه کنید).

$$f_X(x)=\int_0^{2x^2}3xy\,dy=\frac32 x\left[y^2\right]_0^{2x^2}=6x^5$$

$$f_Y(y)=\int_{\sqrt{\frac y2}}^{1}3xy\,dx=\frac32 y\left[x^2\right]_{\sqrt{\frac y2}}^{1}=\frac32 y\left(1-\frac y2\right)$$

بنابراین

$$f_X(x)=\begin{cases}6x^5 & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac32 y\left(1-\frac y2\right) & 0<y<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3xy}{\frac32 y\left(1-\frac y2\right)}=\frac{4x}{2-y}$$

بنابراین

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3xy}{6x^5}=\frac{y}{2x^4}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{4x}{2-y} & 0<y<2,\ \sqrt{\frac y2}<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{y}{2x^4} & 0<x<1,\ 0<y<2x^2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

با توجه به این توابع، احتمالات مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$P\left(0<Y<\frac13 \mid X=\frac12\right)=\int_0^{\frac13} f_{Y|X}\left(y\mid \frac12\right)dy=\int_0^{\frac13}8y\,dy=4y^2\Big|_0^{\frac13}=\frac49$$

$$P\left(\frac12<X<1\mid Y=\frac13\right)=\int_{\frac12}^{1} f_{X|Y}\left(x\mid \frac13\right)dx=\int_{\frac12}^{1}\frac{4x}{\frac53}dx=\frac65 x^2\Big|_{\frac12}^{1}=\frac{9}{10}$$

د- چون $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ پس X و Y از یکدیگر مستقل نیستند. در ضمن چون حدود متغیرهای تصادفی X و Y به یکدیگر وابسته است پس X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

۵.۳ توزیع احتمالات چند متغیره

تمام بحث بخش قبل در مورد توزیع احتمالات توأم دو متغیر تصادفی را می‌توان به n متغیر تصادفی تعمیم داد. فرض کنید $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X_1، X_2، ... و X_n باشد. تابع احتمال حاشیه‌ای X_1 و تابع احتمال توأم حاشیه‌ای X_1 و X_2 به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$f_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\sum_{x_3}\sum_{x_4}\cdots\sum_{x_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

همچنین اگر $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای X_1، X_2، ... و X_n باشد، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 و تابع چگالی احتمال توأم حاشیه‌ای X_2 و X_3 به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_3\dots dx_n$$

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_4\ldots dx_n$$

همچنین تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم شرطی X_1، X_2 و X_3 به شرط $X_4=x_4$، ... و $X_n=x_n$ به صورت زیر به دست می آید.

$$f_{X_1,X_2,X_3|X_4,\ldots,X_n}(x_1,x_2,x_3 \mid x_4,\ldots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_{X_4,\ldots,X_n}(x_4,\ldots,x_n)}$$

تعریف ۶.۳ را می‌توان برای استقلال n متغیر تصادفی به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۷.۳ فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n متغیرهای تصادفی با تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و توابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای $f_{X_1}(x_1)$ ، $f_{X_2}(x_2)$ ، ... و $f_{X_n}(x_n)$ باشند. متغیرهای تصادفی X_1 ، X_2 ، ... و X_n را دو به دو از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و فقط اگر برای هر x_1 ، x_2 ، ... و x_n

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\ldots f_{X_n}(x_n)$$

مثال ۱.۵.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و X_3 دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} c & 0<x_1<x_2<x_3<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 را به دست آورید.

ج- تابع چگالی احتمال توأم X_1 و X_3 را به دست آورید و $P(2X_1<X_3)$ را محاسبه کنید.

د- تابع چگالی احتمال شرطی X_1 به شرط $(X_2,X_3)=(x_2,x_3)$ را به دست آورید.

حل الف-

$$1=c\int_0^1\int_0^{x_3}\int_0^{x_2} dx_1\,dx_2\,dx_3=c\int_0^1\int_0^{x_3} x_2\,dx_2\,dx_3$$

$$=c\int_0^1 \frac{1}{2}x_3^2\,dx_3=\frac{c}{6}x_3^3\Big|_0^1=\frac{c}{6}$$

بنابراین c=۶.

ب-

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{x_2}^1\int_0^{x_2} 6\,dx_1\,dx_3=\int_{x_2}^1 6x_2\,dx_3=6x_2(1-x_2) \qquad 0<x_2<1$$

ج-

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\int_{x_1}^{x_3} 6\,dx_2=6(x_3-x_1) \qquad 0<x_1<x_3<1$$

بنابراین

$$P(2X_1<X_3)=\int_0^1\int_0^{\frac{x_3}{2}} 6(x_3-x_1)\,dx_1\,dx_3=6\int_0^1\left[x_1x_3-\frac{1}{2}x_1^2\right]_0^{\frac{x_3}{2}}dx_3$$

$$=6\left(\frac{3}{8}\right)\int_0^1 x_3^2\,dx=\frac{3}{4}x_3^3\Big|_0^1=\frac{3}{4}$$

د-

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_0^{x_2} 6\,dx_1=6x_2 \qquad 0<x_2<x_3<1$$

$$f_{X_1|X_2,X_3}(x_1 \mid x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)}=\frac{6}{6x_2}=\frac{1}{x_2} \qquad 0<x_1<x_2<x_3<1$$

۶.۳ مسائل حل شده

مثال ۱.۶.۳ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. مقدار k را پیدا کنید.

$$f_X(x)=\frac{k}{2^x} \qquad x=0,1,2,3,4$$

حل بایستی $k\geq 0$ و همچنین

$$1=\sum_{x=0}^{4} f_X(x)=\sum_{x=0}^{4}\frac{k}{2^x}=k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)=k\left(\frac{31}{16}\right)$$

بنابراین $k=\frac{16}{31}$

مثال ۲.۶.۳ فروشگاهی ۶ دستگاه تلویزیون دارد که ۲ دستگاه آن معیوب است. هتلی ۳ دستگاه آن را به طور تصادفی خریداری می‌نماید. اگر X تعداد تلویزیونهای معیوب باشد که توسط هتل خریداری شده است. تابع احتمال X را به دست آورید.

حل در اینجا $S_X=\{0,1,2\}$ و بنابراین

$$f_X(0)=P(X=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$f_X(1)=P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

نمی‌گردید. در حقیقت این مقدار یک عدد انتظاری (حدی) می‌باشد. در این مثال ما یک متغیر تصادفی X داریم که برابر مبلغ جریمه شخص در یک ماه بر حسب هزار تومان است و تابع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	۰/۴۰	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۱۰

عدد زیر را که در حقیقت میانگین وزنی مبلغ جریمه می‌باشد امید ریاضی X یا میانگین X و یا مقدار مورد انتظار X می‌نامند و آنرا با نمادهای $E(X)$ یا μ یا μ_X نمایش می‌دهند.

$$\mu=E(X)=(0\times 0.40)+(1\times 0.30)+(2\times 0.20)+(3\times 0.10)=1$$
$$=\sum_{x=0}^{3} x f_X(x)$$

اگر متغیر تصادفی X پیوسته باشد امید ریاضی آن با تبدیل مجموع به انتگرال در فرمول بالا محاسبه می‌گردد.

تعریف ۱.۴ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال یا چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی X یا میانگین X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X)=\sum_{x} x f_X(x) \qquad \text{اگر X گسسته باشد}$$
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \qquad \text{اگر X پیوسته باشد} \qquad (1.4)$$

در صورتی که مجموع یا انتگرال فوق همگرا نباشد گوئیم امید ریاضی X وجود ندارد.

مثال ۲.۱.۴ فرض کنید بخواهیم ۳ نفر را از بین ۵ مهندس و ۳ تکنسین انتخاب کنیم. امید ریاضی تعداد مهندسین انتخابی در بین این ۳ نفر را به دست آورید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد مهندسین انتخابی در بین ۳ نفر انتخاب شده باشد آنگاه $S_X=\{0,1,2,3\}$ که تابع احتمال آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{8}{3}} \qquad x=0,1,2,3$$

و یا

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

بنابراین

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{3} x f_X(x)=\left(0\times\frac{1}{56}\right)+\left(1\times\frac{15}{56}\right)+\left(2\times\frac{30}{56}\right)+\left(3\times\frac{10}{56}\right)=\frac{105}{56}\approx 1.9$$

یعنی اگر بخواهیم ۳ نفر را از این گروه انتخاب کنیم به طور متوسط انتظار داریم که ۱/۹ آنها مهندس باشند. (توجه کنید که امید ریاضی X ممکن است مقداری باشد که با مجموعهٔ مقادیر X متفاوت است).

مثال ۳.۱.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک بر حسب سال باشد که دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & x>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

متوسط طول عمر این نوع لاستیک را پیدا کنید.

حل متوسط طول عمر این نوع لاستیک E(X) می‌باشد بنابراین

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx=(-x-2)e^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{0}^{+\infty}=0-(-2)=2$$

پس انتظار داریم که این نوع لاستیک به طور متوسط ۲ سال کار کند.

۲.۴ امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی

در بعضی از مسائل نیاز به محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی X مانند g(X) داریم. به عنوان مثال g(X) می‌تواند X^2 یا $2X+3$ یا... باشد. برای محاسبهٔ امید ریاضی g(X) از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۴ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی تابع g(X) به صورت زیر به دست می‌آید

$$E[g(X)]=\sum_x g(X)f_X(x) \quad \text{اگر X گسسته باشد}$$
$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(X)f_X(x)dx \quad \text{اگر X پیوسته باشد} \qquad (۲.۴)$$

مثال ۱.۲.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

x	۱-	۰	۱	۲
$f_X(x)$	۰/۱	۰/۱	۰/۵	۰/۳

امید ریاضی تابع $g(X)=(X-۱)^۲$ را به دست آورید.

حل X یک متغیر تصادفی گسسته است. بنابراین از رابطهٔ (۲.۴) داریم که

$$E[(X-۱)^۲]=\sum_{x=-۱}^{۲}(x-۱)^۲ f_X(x)$$
$$=(-۱-۱)^۲(۰/۱)+(۰-۱)^۲(۰/۱)+(۱-۱)^۲(۰/۵)+(۲-۱)^۲(۰/۳)=۰/۸$$

مثال ۲.۲.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۱۶}\sqrt{x} & ۰<x<۴\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

امید ریاضی $Y=۵X-۴$ را به دست آورید.

حل X یک متغیر تصادفی پیوسته است، بنابراین

$$E(۵X-۴)=\int_۰^۴(۵x-۴)\frac{۳}{۱۶}\sqrt{x}\,dx=\frac{۳}{۱۶}\left[۲\sqrt{x^۵}-\frac{۸}{۳}\sqrt{x^۳}\right]_۰^۴=\frac{۳}{۱۶}[۶۴-\frac{۶۴}{۳}]=۸$$

با توجه به قضیهٔ ۱.۴ می‌توان مفهوم امید ریاضی را به تابعی از دو متغیر تصادفی به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۲.۴ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند. امید ریاضی تابع $g(X,Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E[g(X,Y)]=\sum_x\sum_y g(X,Y)f_{X,Y}(x,y) \quad \text{اگر X و Y گسسته باشند}$$
$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(X,Y)f_{X,Y}(x,y)dxdy \quad \text{اگر X و Y پیوسته باشند} \qquad (۳.۴)$$

تعریف فوق را می‌توان به سادگی برای امید ریاضی تابعی از چند متغیر تصادفی تعمیم داد.

مثال ۳.۲.۴ جعبه‌ای شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره از این جعبه انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد مهره‌های سفید در این یک مهره انتخاب شده در نظر می‌گیریم. سپس از مابقی مهره‌های جعبه دو مهرهٔ دیگر بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی Y را برابر تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این دو مهره انتخابی در نظر می‌گیریم. تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $E(X^۲Y)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $S_X=\{۰,۱\}$ و $S_Y=\{۰,۱,۲\}$ و همچنین داریم که

$$f_{X,Y}(۰,۰)=P(X=۰,Y=۰)=P(X=۰)P(Y=۰\mid X=۰)$$
$$=\frac{۳}{۵}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۴}{۲}}=\frac{۳}{۳۰}=۰/۱$$
$$f_{X,Y}(۱,۰)=P(X=۱,Y=۰)=P(X=۱)P(Y=۰\mid X=۱)$$
$$=\frac{۲}{۵}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۴}{۲}}=\frac{۶}{۳۰}=۰/۲$$

با انجام محاسبات مشابه، جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید

y \ x	۰	۱	$f_Y(y)$
۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۱	۰/۴	۰/۲	۰/۶
۲	۰/۱	۰	۰/۱
$f_X(x)$	۰/۶	۰/۴	

بنابراین

$$E(X^۲Y)=\sum_{x=۰}^{۱}\sum_{y=۰}^{۲}x^۲y f_{X,Y}(x,y)$$
$$=(۰)(۰/۱)+(۰)(۰/۴)+(۰)(۰/۱)+(۰)(۰/۲)+(۱)(۰/۲)+(۲)(۰)=۰/۲$$

مثال ۴.۲.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{۱۶y}{x^۳} & x>۲,\ ۰<y<۱\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

امید ریاضی $g(X,Y)=\frac{X+1}{Y}$ را محاسبه کنید.

حل

$$E(\frac{X+1}{Y})=\int_{2}^{+\infty}\int_{0}^{1}(\frac{x+1}{y})(\frac{16y}{x^{3}})dydx=16\int_{2}^{+\infty}\frac{x+1}{x^{3}}\left[\int_{0}^{1}dy\right]dx$$

$$=16\int_{2}^{+\infty}(\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}})dx=16\left[\frac{-1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}\right]_{2}^{+\infty}=16[(0)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{8})]=10$$

توجه کنید اگر در تعریف ۲.۴ قرار دهیم $g(X,Y)=X$ و یا $g(X,Y)=Y$ آنگاه امید ریاضی X یا Y را می‌توان توسط تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر محاسبه کرد

اگر X و Y گسسته باشند

$$E(X)=\sum_{x}\sum_{y}xf_{X,Y}(x,y)\ ,\ E(Y)=\sum_{x}\sum_{y}yf_{X,Y}(x,y) \qquad (۴.۴)$$

اگر X و Y پیوسته باشند

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

مثال ۵.۲.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

آیا می‌توان E(X) را توسط تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X محاسبه کرد؟ E(X) را با استفاده از رابطهٔ (۴.۴) محاسبه کنید.

حل با توجه به اینکه

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-y}dy$$

و انتگرال فوق قابل محاسبه نیست پس نمی‌توان $f_X(x)$ را به دست آورده و از روی آن E(X) را محاسبه کرد. اما با توجه به رابطهٔ (۴.۴) داریم که

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{y}\frac{x}{y}e^{-y}dxdy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-y}\left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{0}^{y}dy=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}ye^{-y}dy=\frac{1}{2}\left[(-y-1)e^{-y}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(0)-(-1)\right]=\frac{1}{2}$$

۳.۴ قوانین امید ریاضی

در این بخش قضیه‌هایی را برای ساده کردن محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی می‌آوریم. اثبات این قضایا بسیار ساده می‌باشد و بعضی از آنها را در حالت پیوسته ثابت می‌کنیم و مابقی را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۴ اگر g(X) و h(X) توابعی از متغیر تصادفی X باشند که امید ریاضی آنها موجود است و a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E[ag(X)+bh(X)]=aE[g(X)]+bE[h(X)]$$

اثبات

$$E[ag(X)+bh(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[ag(x)+bh(x)]f_X(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)f_X(x)dx$$

$$=aE[g(X)]+bE[h(X)]$$

نتیجهٔ ۱.۴ اگر a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

مثال ۱.۳.۴ مثال ۱.۲.۴ را با استفاده از قضیهٔ ۲.۴ حل کنید.

حل در مثال ۱.۲.۴ تابع احتمال X عبارت بود از

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	۰/۱	۰/۱	۰/۵	۰/۳

بنابراین

$$E(X)=(-1)(0/1)+(0)(0/1)+(1)(0/5)+(2)(0/3)=1$$

$$E(X^{2})=(-1)^{2}(0/1)+(0)^{2}(0/1)+(1)^{2}(0/5)+(2)^{2}(0/3)=1/8$$

و در نتیجه از قضیه ۲.۴ داریم که

$$E[(X-1)^{2}]=E[X^{2}-2X+1]=E(X^{2})-2E(X)+1=1/8-2(1)+1=0/8$$

مثال ۲.۳.۴ مثال ...

حل در مثال ۲.۲.۴ تابع چگالی احتمال X عبارت بود از

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}\sqrt{x} & 0<x<4\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین

$$E(X)=\int_0^4 x\left(\frac{3}{16}\sqrt{x}\right)dx=\frac{3}{16}\times\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\;\Big|_0^4=\frac{12}{5}$$

و در نتیجه از نتیجه ۱.۴ داریم که

$$E(5X-4)=5E(X)-4=5\left(\frac{12}{5}\right)-4=8$$

قضیهٔ ۳.۴ اگر $g(X,Y)$ و $h(X,Y)$ توابعی از متغیرهای تصادفی X و Y باشند که امید ریاضی آنها موجود است و a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E[ag(X,Y)+bh(X,Y)]=aE[g(X,Y)]+bE[h(X,Y)]$$

نتیجهٔ ۲.۴ اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند آنگاه

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

همانطور که در نتیجهٔ ۲.۴ ملاحظه شد، امید مجموع یا تفاضل دو متغیر تصادفی برابر مجموع یا تفاضل امیدهای آنها می‌باشد. اما در حالت کلی امید حاصلضرب دو متغیر تصادفی برابر حاصلضرب امیدهای آنها نیست و تنها در حالتی که دو متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل باشند این رابطه برقرار است. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۴.۴ اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

اثبات چون X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هستند بنابراین برای هر X و Y داریم که

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{X,Y}(x,y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy\\&=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dy\right]=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

مثال ۳.۳.۴ در مثال ۴.۲.۴ نشان دهید که رابطهٔ $E(XY)=E(X)E(Y)$ برقرار است.

حل در مثال ۴.۲.۴ تابع چگالی احتمال توأم X و Y عبارت بود از

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{16y}{x^3} & x>2\,,\; 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین

$$f_X(x)=\int_0^1\frac{16y}{x^3}dy=\frac{8y^2}{x^3}\;\Big|_0^1=\frac{8}{x^3}\qquad x>2$$

$$f_Y(y)=\int_2^{+\infty}\frac{16y}{x^3}dx=\frac{-8y}{x^2}\;\Big|_2^{+\infty}=2y\qquad 0<y<1$$

در نتیجه برای هر x و y داریم که $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ یعنی X و Y از یکدیگر مستقل هستند و طبق قضیهٔ ۴.۴ داریم که $E(XY)=E(X)E(Y)$. در ضمن با انجام محاسبات ساده دیده می‌شود که $E(XY)=\frac{8}{3}$ و $E(X)=4$ و $E(Y)=\frac{2}{3}$ که صحت رابطهٔ مذکور را نشان می‌دهد.

توجه کنید که عکس قضیهٔ ۴.۴ در حالت کلی برقرار نیست. یعنی برای دو متغیر تصادفی X و Y می‌توانیم رابطهٔ $E(XY)=E(X)E(Y)$ را داشته باشیم اما این دو متغیر از یکدیگر مستقل نباشند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴.۳.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند. نشان دهید که X و Y از یکدیگر مستقل نیستند اما رابطهٔ $E(XY)=E(X)E(Y)$ برقرار است.

y \ x	-1	0	1	$f_Y(y)$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	

حل با توجه به اینکه $f_{X,Y}(-1,-1)=0\neq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=f_X(-1)f_Y(-1)$ پس X و Y ...
و $E(XY)=(-1)(-1)(0)+\dots+(1)(1)(\cdot)$ ...

$E(X)=E(Y)=-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}=0$ پس $E(XY)=E(X)E(Y)$.

قوانین امید ریاضی را به سادگی می‌توان به چند متغیر تصادفی تعمیم داد. مثلاً اگر X_1، X_2، ... و X_n، n متغیر تصادفی باشند و a_1، a_2، ... و a_n اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

و اگر این n متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل باشند آنگاه

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

۴.۴ امیدهای ریاضی خاص

در این بخش امیدهای ریاضی توابعی از متغیرهای تصادفی که مفهومی خاص را دارند بررسی می‌کنیم

گشتاورهای یک متغیر تصادفی در قضیهٔ ۱.۴ اگر قرار دهیم $g(X)=X^r$ که در آن r یک عدد صحیح نامنفی است. آنگاه امید ریاضی این تابع را r امین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X گویند و آن را با نماد μ'_r نمایش می‌دهند، یعنی

گشتاور rام X حول مبدأ $\qquad \mu'_r=E(X^r)$	(۵.۴)

توجه کنید که $\mu'_0=1$ و $\mu'_1=E(X)=\mu$ که همان امید ریاضی X و یا میانگین X است. اگر در قضیهٔ ۱.۴ قرار دهیم $g(X)=(X-\mu)^r$ آنگاه امید ریاضی این تابع را گشتاور مرتبهٔ rام X حول میانگین و یا گشتاور مرکزی X گویند و آن را با نماد μ_r نمایش می‌دهند یعنی

گشتاور مرکزی مرتبهٔ rام X $\qquad \mu_r=E[(X-\mu)^r]$	(۶.۴)

توجه کنید که $\mu_0=1$ و $\mu_1=0$ می‌باشد.

واریانس گشتاور مرکزی مرتبهٔ دوم X را واریانس X گویند و با نمادهای σ^2 یا σ_X^2 یا $Var(X)$ نمایش می‌دهند، یعنی

واریانس X $\qquad \sigma^2=\sigma_X^2=Var(X)=E[(X-\mu)^2]$	(۷.۴)

واریانس یک متغیر تصادفی، میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی نسبت به میانگین آن را

می‌سنجد. هر چه واریانس بزرگتر باشد، میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی نسبت به میانگین بیشتر می‌باشد و هر چه واریانس کوچکتر باشد این میزان کمتر است. جذر واریانس یعنی σ را انحراف معیار گویند. با استفاده از قوانین امید ریاضی می‌توان فرم ساده‌تری برای محاسبهٔ واریانس به دست آورد که آن را در قضیهٔ زیر می‌آوریم.

قضیهٔ ۵.۴ واریانس یک متغیر تصادفی X با میانگین μ به صورت زیر به دست می‌آید

$$Var(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2 \qquad (8.4)$$

مثال ۱.۴.۴ در مثال ۲.۱.۴ واریانس متغیر تصادفی X را به دست آورید.

حل در مثال ۲.۱.۴ دیدیم که $\mu=E(X)=\frac{105}{56}$ و

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

بنابراین

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{3} x^2 f_X(x)=(0^2)\left(\frac{1}{56}\right)+(1^2)\left(\frac{15}{56}\right)+(2^2)\left(\frac{30}{56}\right)+(3^2)\left(\frac{10}{56}\right)=\frac{225}{56}$$

و در نتیجه

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{225}{56}-\left(\frac{105}{56}\right)^2=\frac{1575}{3136}=0/502$$

مثال ۲.۴.۴ میانگین و واریانس متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی احتمال زیر است را پیدا کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases} 4xe^{-2x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل به وسیلهٔ انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء داریم که

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty} x(4xe^{-2x})dx=\left[(-2x^2-2x-1)e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=(0)-(-1)=1$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2(4xe^{-2x})dx=\left[\left(-2x^3-3x^2-3x-\frac{3}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=(0)-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\sigma^2=Var(X)=\frac{3}{2}-(1)^2=\frac{1}{2}$$

کوواریانس در تعریف ۲.۴ اگر قرار دهیم $g(X,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ آنگاه امید ریاضی این تابع را کوواریانس X و Y گویند و آن را با نمادهای σ_{XY} و یا $COV(X,Y)$ نمایش می‌دهند، یعنی

(۹.۴) کواریانس $\sigma_{XY}=COV(X,Y)=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$

* کواریانس X و Y رابطهٔ دو متغیر تصادفی X و Y را نشان می‌دهد. اگر X و Y هم جهت باشند (یعنی هر دو با هم افزایش و یا هر دو با هم کاهش یابند) آنگاه کواریانس X و Y مثبت است و اگر X و Y در خلاف جهت هم باشند آنگاه کواریانس X و Y منفی است. با استفاده از قوانین امید ریاضی می‌توان فرم ساده‌تری برای محاسبه کواریانس به دست آورد که آن را در قضیهٔ زیر می‌آوریم.

قضیهٔ ۶.۴ کواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر به دست می‌آید

(۱۰.۴) $$COV(X,Y)=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

نتیجهٔ ۳.۴ با استفاده از قضیهٔ ۴.۴ و قضیهٔ ۶.۴، اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه $COV(X,Y)=۰$. ولی عکس این مطلب برقرار نیست، یعنی اگر $COV(X,Y)=۰$ آنگاه دلیلی ندارد که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند (مثال ۴.۳.۴ را ملاحظه کنید).

مثال ۳.۴.۴ در مثال ۳.۲.۴ کواریانس متغیرهای تصادفی X و Y را به دست آورید.

حل در مثال ۳.۲.۴ جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست آمد

y \ x	۰	۱	$f_Y(y)$
۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۱	۰/۴	۰/۲	۰/۶
۲	۰/۱	۰	۰/۱
$f_X(x)$	۰/۶	۰/۴	

بنابراین

$$E(X)=(۰)(۰/۶)+(۱)(۰/۴)=۰/۴$$
$$E(Y)=(۰)(۰/۳)+(۱)(۰/۶)+(۲)(۰/۱)=۰/۸$$
$$E(XY)=۰+۰+۰+۰+۰/۲+۰=۰/۲$$

در نتیجه

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=(۰/۲)-(۰/۸)(۰/۴)=-۰/۱۲$$

چون کواریانس منفی است پس X و Y در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. یعنی اگر در انتخاب مهرهٔ اول تعداد سفید به یک مهره افزایش یابد آنگاه در انتخاب ۲ مهره بعدی تعداد مهره‌های سفید انتخابی کاهش می‌یابد.

خواص واریانس و کواریانس با استفاده از قوانین امید ریاضی به سادگی می‌توان خواص زیر را

برای واریانس و کواریانس نتیجه گرفت که اثبات آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید a، b و c اعداد ثابت و X و Y متغیرهای تصادفی باشند، در این صورت

الف- $Var(c)=۰$ ، $Var(aX+b)=a^۲Var(X)$

ب- $COV(X,X)=Var(X)$

ج- $COV(X,Y)=COV(Y,X)$

د- $COV(X,c)=۰$

ه- $COV(aX+b,cY+d)=ac\,COV(X,Y)$

و- $Var(aX+bY+c)=a^۲Var(X)+b^۲Var(Y)+۲ab\,COV(X,Y)$

ز- اگر X و Y مستقل باشند آنگاه

$$Var(aX+bY+c)=a^۲Var(X)+b^۲Var(Y)$$

ح- اگر $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی باشند آنگاه

$$COV(aX_۱+bX_۲,Y)=a\,COV(X_۱,Y)+b\,COV(X_۲,Y)$$

خاصیت (ه) می‌گوید که اگر مبدأ اندازه‌گیری X و Y را تغییر دهیم، کواریانس آنها تغییر نمی‌کند ولی اگر واحد اندازه‌گیری X و Y را تغییر دهیم، کواریانس آنها تغییر می‌کند.

مثال ۴.۴.۴ در مثال ۳.۴.۴، $Var(۲X-۳Y+۴)$ را محاسبه کنید.

حل با استفاده از جدول توزیع احتمالات توأم در مثال ۳.۴.۴ داریم که $COV(X,Y)=-۰/۱۲$

و همچنین

$$E(X)=E(X^۲)=۰/۴ \Rightarrow Var(X)=۰/۴-(۰/۴)^۲=۰/۲۴$$
$$E(Y)=۰/۸,\ E(Y^۲)=۱ \Rightarrow Var(Y)=۱-(۰/۸)^۲=۰/۳۶$$

بنابراین

$$Var(۲X-۳Y+۴)=۴Var(X)+۹Var(Y)-۱۲COV(X,Y)$$
$$=۴(۰/۲۴)+۹(۰/۳۶)-۱۲(-۰/۱۲)=۵/۶۴$$

ضریب همبستگی در خاصیت (ه) کواریانس مشاهده کردیم که کواریانس بستگی به واحد اندازه‌گیری X و Y دارد. برای اینکه معیاری برای سنجش میزان رابطه دو متغیر تصادفی X و Y پیدا کنیم که به واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی نداشته باشد، کواریانس بین متغیرهای $\frac{X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y}{\sigma_Y}$ را محاسبه می‌کنیم که σ_X,σ_Y به ترتیب انحراف معیارهای X و Y هستند، یعنی

$$COV\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

این معیار را ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y می‌نامند و آن را با نمادهای ρ یا $\rho(X,Y)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

ضریب همبستگی X و Y

$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad (۱۱.۴)$$

ضریب همبستگی دو متغیر X و Y میزان رابطهٔ خطی دو متغیر تصادفی X و Y را می‌سنجد. با استفاده از قوانین امید ریاضی و خواص واریانس و کوواریانس می‌توان خواص زیر را برای ضریب همبستگی اثبات کرد که اثبات آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید a و b اعداد ثابت و X و Y دو متغیر تصادفی باشند، در این صورت

الف- $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$

ب- همواره داریم که $-1\le\rho\le 1$

ج- اگر $Y=aX+b$ و $a>0$ آنگاه $\rho>0$

د- اگر $Y=aX+b$ و $a<0$ آنگاه $\rho<0$

ه- اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho=0$

خاصیت (الف) می‌گوید که ضریب همبستگی X و Y به مبدأ و واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی ندارد. توجه کنید که اگر $\rho=0$ باشد آنگاه دلیلی ندارد که X و Y از یکدیگر مستقل باشند (نتیجهٔ ۳.۴ را ملاحظه کنید). در این حالت یعنی حالتی که $\rho=0$ باشد، متغیرهای تصادفی X و Y را ناهمبسته گویند.

مثال ۵.۴.۴ در مثال ۳.۴.۴ ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید.

حل در مثال ۴.۲.۴ مشاهده کردیم که

$$Var(X)=0/24\ ,\quad Var(Y)=0/36\ ,\quad COV(X,Y)=-0/12$$

بنابراین

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{-0/12}{\sqrt{(0/24)(0/36)}}=\frac{-1}{\sqrt{6}}=-0/408$$

یعنی X و Y دارای رابطه در خلاف جهت یکدیگر هستند ولی این رابطه خیلی شدید نیست.

مثال ۶.۴.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند. ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل برای محاسبهٔ ضریب همبستگی X و Y ابتدا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را به دست می‌آوریم:

$$f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=\left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty}=e^{-x} \qquad x>0$$

$$f_Y(y)=\int_0^{y}e^{-y}dx=e^{-y}[x]_0^{y}=ye^{-y} \qquad y>0$$

به وسیلهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که برای هر عدد صحیح نامنفی n داریم که $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$ بنابراین

$$E(X)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1!=1\ ,\quad E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2!=2$$

و در نتیجه $Var(X)=2-(1)^2=1$. همچنین

$$E(Y)=\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=2!=2\ ,\quad E(Y^2)=\int_0^{+\infty}y^3e^{-y}dy=3!=6$$

و در نتیجه $Var(Y)=6-(2)^2=2$. همچنین

$$E(XY)=\int_0^{+\infty}\int_0^{y}xye^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}ye^{-y}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{y}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}y^3e^{-y}dy=\frac{3!}{2}=3$$

و در نتیجه $COV(X,Y)=3-(1)(2)=1$. بنابراین

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{1}{\sqrt{(1)(2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0/707$$

۵.۴ امید ریاضی و واریانس شرطی

همانند تعریف امید ریاضی و تعریف واریانس، می‌توان امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی را تعریف کرد. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. امید ریاضی شرطی X^r به شرط $Y=y$

$$E(X^r \mid Y=y)=\begin{cases}\sum_x x^r f_{X\mid Y}(x\mid y) & \text{اگر X و Y گسسته باشند}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_{X\mid Y}(x\mid y)\,dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند}\end{cases} \qquad (۱۲.۴)$$

به همین ترتیب امید ریاضی Y^r به شرط $X=x$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(Y^r \mid X=x)=\begin{cases}\sum_y y^r f_{Y\mid X}(y\mid x) & \text{اگر X و Y گسسته باشند}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^r f_{Y\mid X}(y\mid x)\,dy & \text{اگر X و Y پیوسته باشند}\end{cases} \qquad (۱۳.۴)$$

واریانس شرطی X به شرط $Y=y$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}Var(X\mid Y=y)&=E\left\{\left[X-E(X\mid Y=y)\right]^2 \mid Y=y\right\}\\ &=E(X^2\mid Y=y)-\left[E(X\mid Y=y)\right]^2\end{aligned} \qquad (۱۴.۴)$$

به همین ترتیب واریانس شرطی Y به شرط $X=x$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}Var(Y\mid X=x)&=E\left\{\left[Y-E(Y\mid X=x)\right]^2 \mid X=x\right\}\\ &=E(Y^2\mid X=x)-\left[E(Y\mid X=x)\right]^2\end{aligned} \qquad (۱۵.۴)$$

مثال ۱.۵.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند. $E(X^2\mid Y=3)$ را محاسبه کنید.

y \ x	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
۲	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{2}{8}$
۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
۴	۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$f_X(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	

حل تابع احتمال شرطی X به شرط $Y=3$ به صورت ...

x	۲	۳	۴
$f_{X\mid Y}(x\mid 3)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

بنابراین

$$E(X^2\mid Y=3)=\sum_{x=2}^{4} x^2 f_{X\mid Y}(x\mid 3)=(2^2)(\tfrac{1}{4})+(3^2)(\tfrac{2}{4})+(4^2)(\tfrac{1}{4})=\frac{38}{4}=\text{۹/۵}$$

مثال ۲.۵.۴ در مثال ۶.۴.۴، $Var(X\mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

حل در مثال ۶.۴.۴ داشتیم که

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<x<y<+\infty\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases} \quad , \quad f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y} \qquad 0<x<y<+\infty$$

در نتیجه

$$E(X\mid Y=y)=\int_0^y x(\tfrac{1}{y})dx=\frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^y=\frac{y}{2}$$

$$E(X^2\mid Y=y)=\int_0^y x^2(\tfrac{1}{y})dx=\frac{1}{y}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^y=\frac{y^2}{3}$$

و بنابراین

$$Var(X\mid Y=y)=\frac{y^2}{3}-(\frac{y}{2})^2=\frac{1}{12}y^2 \qquad y>0$$

۶.۴ مسائل حل شده

مثال ۱.۶.۴ از جعبه‌ای محتوی ۸ لامپ که ۲ تای آنها سوخته است ۳ لامپ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر X نشان دهندهٔ تعداد لامپهای سوخته باشد، امید ریاضی X را به دست آورید.

حل تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{2}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{8}{3}} \quad , \quad x=0,1,2$$

بنابراین

x	۰	۱	۲
$f_X(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$E(X)=\sum ...$

X = تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این ۳ مهره

Y = تعداد مهره‌های قرمز مشاهده شده در این ۳ مهره

تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و $\rho(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۳۵ تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر است

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cxye^{-(x^2+y^2)} & x>0\ ,\ y>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مقدار c را تعیین کنید و $P(X<Y<2X)$ و $COV(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۳۶ اگر تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} kxy & x>0\ ,\ y>0\ ,\ x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و $P(X\le Y)$ و $Var(X\mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

۳۷ اگر

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases} \dfrac{k+a}{y} & 0<x<y \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}\ ,\qquad f_Y(y)=\begin{cases} 2y & 0<y<k-a \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مقادیر a و k را تعیین کنید و $E(Y\mid X=x)$ و ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

۳۸ ظرف A شامل ۱ گلولهٔ سفید و ۱ گلولهٔ سیاه، ظرف B شامل ۲ گلولهٔ سفید و ۲ گلولهٔ سیاه است. به تصادف و با جایگذاری ۲ گلوله از A خارج می‌کنیم، اگر هم رنگ باشند ۱ گلوله سفید و اگر هم رنگ نباشند یک گلولهٔ سیاه به ظرف B اضافه می‌کنیم و سپس به تصادف از B یک گلوله خارج می‌کنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد گلوله‌های سفید خارج شده از A و B باشند. تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و $P(X+Y\le 1)$، $Var(Y\mid X=0)$ و $Var(X+Y-2)$ را محاسبه کنید.

۳۹ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 1 & 0<x<1\ ,\ x<y<x+1 \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

فصل پنجم

برخی توزیعهای احتمال

۱.۵ مقدمه

در فصل سوم در مورد به دست آوردن توزیع احتمال یک متغیر تصادفی بحث کردیم. در این فصل می‌خواهیم توزیع احتمال چند متغیر تصادفی بخصوص را به دست آوریم.

بعضی از متغیرهای تصادفی دارای یک الگوی خاص هستند و می‌توان برای آنها یک نوع توزیع احتمال را در نظر گرفت. برای مثال در انجام آزمایشات پرتاب یک تاس ۷ مرتبه و پرتاب یک نیزه به طرف هدف، فرض کنید که

X = تعداد مشاهده عدد ۴ در ۷ مرتبه پرتاب تاس

Y = تعداد برخورد به هدف نیزه در ۵ مرتبه پرتاب نیزه

همانطور که دیده می‌شود این دو متغیر تصادفی دارای یک شکل بخصوص هستند، در حقیقت هر دو تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل را بیان می‌کنند. حال اگر توزیع احتمال برای تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل را به دست آوریم آنگاه توزیع احتمال برای تعداد زیادی متغیر تصادفی مشابه با X و Y گفته شده در بالا را به دست آورده‌ایم.

در این فصل ابتدا چند توزیع احتمال گسسته خاص و سپس چند توزیع احتمال پیوسته خاص

۲.۵ توزیع برنولی[1]

آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای دو نتیجه موفقیت با احتمال p و شکست با احتمال $q=1-p$ باشد. چنین آزمایشی را آزمایش برنولی گویند. برای مثال پرتاب یک سکه یک آزمایش برنولی است که در آن موفقیت مشاهده شیر با $p=\frac{1}{2}$ و مشاهده خط شکست با $q=\frac{1}{2}$ می‌باشد. همچنین در پرتاب یک تاس که در آن موفقیت مشاهده عدد ۴ با $p=\frac{1}{6}$ و مشاهده عدد غیر از ۴ شکست با $q=\frac{5}{6}$ است. اگر متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X=\begin{cases}1 & \text{اگر نتیجه آزمایش موفقیت باشد}\\ 0 & \text{اگر نتیجه آزمایش شکست باشد}\end{cases}$$

در این صورت متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی برنولی گوئیم و آن را با نماد $X\sim B(1,p)$ نمایش داده و گوئیم X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است (عدد ۱ نمایانگر انجام یک بار آزمایش است). تابع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر به دست می‌آید

x	0	1
$f_X(x)=P(X=x)$	$1-p$	p

که آن را می‌توان در فرمول زیر خلاصه کرد

$$f_X(x)=p^x(1-p)^{1-x}\quad,\quad x=0,1$$
تابع احتمال توزیع برنولی (۱.۵)

در قضیه زیر امید ریاضی و واریانس این توزیع را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۵ اگر $X\sim B(1,p)$ آنگاه $E(X)=p$ و $Var(X)=pq$.

اثبات

$$E(X)=(0)(1-p)+(1)(p)=p$$
$$E(X^2)=(0^2)(1-p)+(1^2)(p)=p$$

بنابراین

$$Var(X)=p-p^2=p(1-p)=pq$$

مثال ۱.۲.۵ یک تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$X=\begin{cases}1 & \text{اگر عدد ۴ مشاهده شود}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

در این صورت $X\sim B(1,\frac{1}{6})$ و همچنین

$$f_X(x)=(\tfrac{1}{6})^x(\tfrac{5}{6})^{1-x}\quad,\quad x=0,1$$
$$E(X)=\frac{1}{6}\quad,\quad Var(X)=\frac{1}{6}(\frac{5}{6})=\frac{5}{36}$$

۳.۵ توزیع دو جمله‌ای[1]

آزمایش تصادفی که از انجام چند آزمایش مستقل برنولی بوجود می‌آید را آزمایش دو جمله‌ای گویند. برای مثال انتخاب ۵ مهره با جایگذاری از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۶ مهره قرمز است و موفقیت برای ما مشاهده مهره قرمز است یک آزمایش دو جمله‌ای با احتمال موفقیت $\frac{6}{14}$ می‌باشد.

به طور کلی یک آزمایش دو جمله‌ای دارای خواص زیر است.

۱ـ آزمایش دو جمله‌ای از انجام n آزمایش مستقل برنولی بوجود آمده است.

۲ـ در آزمایشات برنولی احتمال موفقیت p (و شکست $q=1-p$) می‌باشد که در تمام آزمایشات برنولی مقداری ثابت است.

مثال ۱.۳.۵ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر موفقیت مشاهده شیر باشد، در این صورت یک آزمایش دو جمله‌ای با پارامترهای $n=4$ و $p=\frac{2}{3}$ داریم.

مثال ۲.۳.۵ بسکتبالیستی ۶۰٪ از توپهایش گل می‌شود. اگر او ۵ پرتاب مستقل انجام دهد و موفقیت برای او گل شدن توپ باشد، در این صورت یک آزمایش دو جمله‌ای با پارامترهای $n=5$ و $p=0/6$ داریم.

تعریف ۱.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

X = تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل برنولی

آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p

باشد، آنگاه گوئیم که X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است و آن را با نماد $X \sim B(n,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای ابتدا مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۳.۳.۵ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر

X = تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه

الف- P(X=۳) را محاسبه کنید.

ب- تابع احتمال X را به دست آورید.

حل با توجه به تعریف ۱.۵ داریم که $X \sim B(۴,\frac{۲}{۳})$ بنابراین

الف- P(X=۳) بدین معنی است که در ۴ مرتبه پرتاب سکه می‌خواهیم ۳ شیر مشاهده کنیم که یک حالت خاص آن HHHT با احتمال $(\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^{۳}$ است و تعداد حالات مشاهده ۳ شیر در ۴ مرتبه پرتاب سکه برابر $\binom{۴}{۳}$ است. بنابراین

$$P(X=۳)=\binom{۴}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴-۳}$$

ب- با انجام عملیات مشابه قسمت الف تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_X(x)=P(X=x)=\binom{۴}{x}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{x}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴-x} \quad , \quad x=۰,۱,۲,۳,۴$$

در حالت کلی اگر $X \sim B(n,p)$ آنگاه P(X=x) بدین معنی است که در n آزمایش مستقل برنولی ما x موفقیت و n-x شکست داشته باشیم که در یک حالت خاص احتمال آن برابر $p^x q^{n-x}$ است و تعداد حالاتی که می‌توان در n آزمایش x موفقیت مشاهده کرد برابر $\binom{n}{x}$ است و بنابراین تابع احتمال X برابر است با

(۲.۵) تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای $f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \ , \ x=۰,۱,۲,...,n$

توجه کنید که توزیع برنولی یک حالت خاص توزیع دو جمله‌ای با پارامتر n=۱ است. اگر در n آزمایش برنولی مستقل، متغیر تصادفی X_i برابر نتیجه i-امین آزمایش باشد آنگاه $X=X_۱+X_۲+...+X_n$ تعداد موفقیتها در این n آزمایش برنولی مستقل می‌باشد و $X \sim B(n,p)$ است. در زیر امید ریاضی و واریانس توزیع دو جمله‌ای را به دست

قضیه ۲.۵ اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه $E(X)=np$ و $Var(X)=npq$.

اثبات با توجه به مطلب بالا داریم که $X=X_۱+X_۲+...+X_n$ که $X_۱, X_۲, ..., X_n$ از یکدیگر مستقل و هر یک دارای توزیع برنولی با پارامتر p هستند. بنابراین طبق خواص امید ریاضی و واریانس داریم که

$$E(X)=E(\sum_{i=۱}^{n}X_i)=\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)=\sum_{i=۱}^{n}p=np$$

$$Var(X)=Var(\sum_{i=۱}^{n}X_i)=\sum_{i=۱}^{n}Var(X_i)=\sum_{i=۱}^{n}pq=npq$$

مثال ۴.۳.۵ یک تاس را ۵ بار پرتاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه عدد ۴ دقیقاً ۳ بار مشاهده شود را بیابید؟

ب- احتمال اینکه عدد ۴ حداکثر ۲ بار مشاهده شود را بیابید؟

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد مشاهده شیر در ۵ بار پرتاب سکه باشد آنگاه $X\sim B(۵,\frac{۱}{۶})$ است که تابع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

$$f_X(x)=\binom{۵}{x}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{x}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵-x} \quad , \quad x=۰,۱,...,۵$$

بنابراین

الف- $P(X=۳)=f_X(۳)=\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۳}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵-۳}=۰/۰۳۲$

ب- $P(X\le ۲)=\sum_{x=۰}^{۲}f_X(x)=\binom{۵}{۰}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۰}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵}+\binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۱}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}+\binom{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۲}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}$

$$=۰/۹۶۴۵$$

برای محاسبه احتمالات در توزیع دو جمله‌ای جدول (I) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $P(X\le r)$ برای مقادیر $n=۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰$ و $p=۰/۱, ۰/۲, ۰/۲۵, ..., ۰/۹$ محاسبه گردیده است. برای مثال اگر $X\sim B(۱۰, ۰/۳)$ باشد آنگاه از جدول (I) داریم که $P(X\le ۴)=۰/۸۴۹۷$.

مثال ۵.۳.۵ یک آزمون انگلیسی شامل ۲۰ سؤال پنج گزینه‌ای است که در هر سؤال تنها یک گزینه درست می‌باشد. شخصی که اصلاً انگلیسی نمی‌داند در این آزمون شرکت می‌کند و سؤالات

الف - انتظار دارید که چند سئوال را درست پاسخ دهد؟

ب - احتمال اینکه حداقل ۱۰ سئوال را درست پاسخ دهد را بیابید.

ج - احتمال اینکه بین ۲ تا ۷ سئوال را درست پاسخ دهد را بیابید.

د - احتمال اینکه دقیقاً ۹ سئوال را درست پاسخ دهد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد سئوالات درس پاسخ داده شده در بین ۲۰ سئوال باشد آنگاه $X\sim B(20, 0/2)$ و بنابراین

$$\mu=E(X)=np=20\,(0/2)=4$$

الف - پس انتظار داریم ۴ سئوال را درست پاسخ دهد.

ب - $P(X\geq 10)=1-P(X<10)=1-P(X\leq 9)=1-0/9974=0/0026$

ج - $P(2<X<7)=P(2<X\leq 6)=P(X\leq 6)-P(X\leq 2)=0/9133-0/2061$
$=0/7072$

د - $P(X=9)=P(X\leq 9)-P(X\leq 8)=0/9974-0/9900=0/0074$

۴.۵ توزیع فوق هندسی[1]

در بخش قبل اگر آزمایشات برنولی تکرار شده، از یکدیگر مستقل نباشند آنگاه آزمایش به دست آمده دیگر آزمایش دو جمله‌ای نمی‌باشد. برای مثال در انتخاب ۵ مهره بدون جایگذاری از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۶ مهره قرمز است و موفقیت برای ما مشاهده مهره قرمز است، احتمال موفقیت در هر بار آزمایش تغییر می‌کند و دیگر آزمایش دو جمله‌ای نمی‌باشد. برای اینکه در حالت مستقل نبودن آزمایشات برنولی یا انتخاب بدون جایگذاری، نحوه انجام آزمایش و توزیع احتمال مربوطه را به دست آوریم به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۴.۵ از بین ۳ شیمی‌دان و ۴ فیزیک‌دان می‌خواهیم یک کمیته ۵ نفری را انتخاب کنیم. تابع احتمال برای تعداد شیمی‌دانهای انتخابی در کمیته را به دست آورید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد شیمی‌دانهای انتخابی در کمیته ۵ نفری (تعداد موفقیتها در n

1- Hyper G...

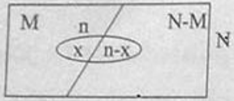
آزمایش غیرمستقل) باشد آنگاه بواسطه انتخاب بدون جایگذاری افراد، X مقادیر $S_X=\{1,2,3\}$ را می‌گیرد و

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} \quad , \quad P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{3}}{\binom{7}{5}}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}}$$

و بنابراین

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{3}{x}\binom{4}{5-x}}{\binom{7}{5}} \quad , \quad x=1,2,3$$



در حالت کلی جمعیت مورد نظر ما به دو قسمت، جمعیت موفقیت و جمعیت شکست تقسیم می‌شود که یکی Mتایی و دیگر N-Mتایی است که N اندازه کل جمعیت است. می‌خواهیم n عضو از این جمعیت Nتایی را بدون جایگذاری انتخاب کنیم. چنین آزمایشی را آزمایش فوق هندسی گویند.

تعریف ۲.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

X = تعداد موفقیتها در یک آزمایش فوق هندسی
= تعداد موفقیتها در nآزمایش غیر مستقل

آنگاه X را یک متغیر تصادفی فوق هندسی گوییم و آن را با نماد $X\sim HG(N,M,n)$ نشان می‌دهیم که در آن N برابر تعداد اعضای جمعیت، M برابر تعداد اعضای جمعیت موفقیت و n برابر تعداد اعضای نمونه انتخابی است.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع فوق هندسی توجه کنید که P(X=x) بدین معنی است که در انتخاب n عضو از جمعیت Nتایی (به $\binom{N}{n}$ طریق) می‌خواهیم x عضو از جمعیت موفقیت Mتایی (به $\binom{M}{x}$ طریق) و مابقی از جمعیت شکست (به $\binom{N-M}{n-x}$ طریق) باشند.

بنابراین

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

حال چون در ترکیب $\binom{M}{x}$ بایستی $0 \le x \le M$ و در ترکیب $\binom{N-M}{n-x}$ بایستی $0 \le n-x \le N-M$ باشد پس نتیجه می‌شود که $\max(0,n-N+M) \le x \le \min(n,M)$

بنابراین

تابع احتمال توزیع فوق هندسی $f_X(x)=\dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}\ ,\quad \max(0,n-N+M)\le x\le \min(n,M)$ (۳.۵)

برای مثال در مثال (۱.۴.۵) داریم که $X\sim HG(7,3,5)$

$$f_X(x)=\frac{\binom{3}{x}\binom{7-3}{5-x}}{\binom{7}{5}}\ ,\quad \max(0,5-7+3)\le x\le \min(5,3)\Rightarrow 1\le x\le 3$$

مثال ۲.۴.۵ در انتخاب ۵ قطعه از بین ۴۰ قطعه که ۳ تای آنها خراب است احتمال این را پیدا کنید که حداکثر یک قطعه انتخاب شده خراب باشد.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد قطعات خراب انتخاب شده در بین ۵ قطعه انتخابی باشد آنگاه $X\sim HG(40,3,5)$ و $S_X=\{0,1,2,3\}$. بنابراین

$$P(X\le 1)=f_X(0)+f_X(1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}}+\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0/9635$$

در قضیه زیر امید ریاضی و واریانس توزیع فوق هندسی را بدون اثبات می‌آوریم.

قضیه ۳.۵ اگر $X\sim HG(N,M,n)$ آنگاه

$$E(X)=\frac{nM}{N}\ ,\quad Var(X)=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

۱.۴.۵ تقریب توزیع فوق هندسی بوسیله توزیع دوجمله‌ای

اگر در آزمایش فوق هندسی n نسبت به N عدد کوچکی باشد آنگاه انتخاب اعضاء در مراحل مختلف دارای احتمالات تقریباً یکسان هستند یعنی انتخاب اعضاء را می‌توان تقریباً با جایگذاری در نظر گرفت و در نتیجه ما یک آزمایش دو جمله‌ای خواهیم داشت. در این حالت می‌توان توزیع فوق هندسی ...

اگر زمانی که M و N به سمت بی نهایت میل کنند، مقدار $\frac{M}{N}=p$ ثابت باشد آنگاه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

مثال ۳.۴.۵ در یک منطقه ۴۰۰۰ از ۱۰۰۰۰ رای دهنده با مالیات فروش مخالف می‌باشند. اگر ۱۵ نفر از افرادی که می‌توانند رای دهند به طور تصادفی انتخاب شوند و از آنها در مورد عقیده‌شان سئوال شود، احتمال اینکه حداکثر ۷ نفر از آنها موافق مالیات فروش باشند را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد رای دهندگان در بین ۱۵ نفر باشد که موافق مالیات فروش هستند، آنگاه $X\sim HG(10000,6000,15)$ و چون n=۱۵ نسبت به N=۱۰۰۰۰ عدد کوچکی است پس تقریباً $X\sim B(15,0/6)$ که در آن $p=\frac{M}{N}=\frac{6000}{10000}=0/6$. بنابراین با استفاده از جدول (I) داریم که

$$P(X\le 7)\approx\sum_{x=0}^{7}\binom{15}{x}(0/6)^x(0/4)^{15-x}=0/2131$$

۵.۵ توزیع پواسون[1]

آزمایشی که تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص را به دست دهد یک آزمایش پواسون نامیده می‌شود. این فاصله زمانی می‌تواند هر فاصله زمانی مانند ثانیه، دقیقه و... باشد و ناحیه مشخص نیز می‌تواند یک فاصله خطی یا مساحت یا حجم یا... باشد.

تعریف ۳.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

X = تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص

آنگاه X را یک متغیر تصادفی پواسون گویند.

برای مثال اگر X تعداد تلفن هایی باشد که در یک ساعت به رییس یک شرکت زده می‌شود و یا X تعداد غلطهای تایپی در هر صفحه یک کتاب باشد و یا X تعداد تاکسی‌هایی باشد که در یک ساعت معین از یک چهار راه عبور می‌کنند، آنگاه X یک متغیر تصادفی پواسون است.

یک آزمایش پواسون بایستی دارای خواص زیر باشد

1- Poisson Distribution

۱ـ تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص اتفاق می‌افتد از تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی دیگر یا ناحیه دیگر اتفاق می‌افتد مستقل باشد.

۲ـ احتمال اینکه یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه کوچک روی دهد متناسب با طول فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد و بستگی به تعداد موفقیتها در خارج از فاصله زمانی یا ناحیه نداشته باشد.

۳ـ احتمال روی دادن بیش از یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه مشخص کوچک، قابل صرفنظر باشد.

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پواسون به پارامتر μ یعنی میانگین تعداد موفقیتها در فاصله زمانی یا ناحیه مورد نظر بستگی دارد. اگر X دارای توزیع پواسون با میانگین μ باشد آن را با نماد $X \sim P(\mu)$ نمایش می‌دهیم. در تعریف و قضیه زیر تابع احتمال و امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی پواسون را بدون اثبات می‌آوریم.

تعریف ۴.۵ اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد آنگاه $X \sim P(\mu)$ و

تابع احتمال توزیع پواسون

$$f_X(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \quad , \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots \qquad (۴.۵)$$

قضیه ۴.۵ اگر $X \sim P(\mu)$ آنگاه $E(X) = \mu$ و $Var(X) = \mu$.

مثال ۱.۵.۵ یک دستگاه چاپگر کامپیوتری به طور متوسط در هر ماه ۲ بار سرویس می‌شود.

الف- احتمال اینکه در یک ماه کمتر از ۲ بار سرویس شود را بیابید.

ب- احتمال اینکه در سه ماه این چاپگر حداقل ۲ بار سرویس شود را بیابید.

حل الف- اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعاتی باشد که چاپگر در یک ماه سرویس می‌شود آنگاه $X \sim P(۲)$ و بنابراین

$$P(X<۲) = f_X(۰) + f_X(۱) = \frac{e^{-۲}۲^۰}{۰!} + \frac{e^{-۲}۲^۱}{۱!} = ۰/۴۰۶$$

ب- اگر متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعاتی باشد که چاپگر در سه ماه سرویس می‌شود آنگاه طبق خاصیت دوم آزمایش پواسون $Y \sim P(۶)$ و بنابراین

$$P(Y \geq ۲) = ۱ - P(Y<۲) = ۱ - \left\{f_Y(۰) + f_Y(۱)\right\} = ۱ - \left\{\frac{e^{-۶}۶^۰}{۰!} + \frac{e^{-۶}۶^۱}{۱!}\right\} = ۰/۹۸۲۶$$

برای محاسبه احتمالات در توزیع پواسون جدول (II) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $P(X \leq r)$ برای مقادیر $\mu = ۰/۱, ۰/۲, \ldots, ۱, ۱/۵, ۲, \ldots, ۱۸$ محاسبه شده است. برای مثال اگر $X \sim P(۵)$ آنگاه از این جدول به دست می‌آوریم که $P(X \leq ۳) = ۰/۲۶۵۰$

مثال ۲.۵.۵ به طور متوسط در هر ده دقیقه ۶ مشتری به پای صندوق پرداخت یک فروشگاه می‌رسند.

الف- احتمال اینکه در ده دقیقه حداکثر ۴ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

ب- احتمال اینکه در پنج دقیقه حداقل ۲ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

حل الف- اگر X = تعداد مشتریانی که در ده دقیقه به پای صندوق می‌رسند

آنگاه $X \sim P(۶)$ و $P(X \leq ۴) = ۰/۲۸۵۱$

ب- اگر Y = تعداد مشتریانی که در پنج دقیقه به پای صندوق می‌رسند

آنگاه $Y \sim P(۳)$ و $P(Y \geq ۲) = ۱ - P(Y<۲) = ۱ - P(Y \leq ۱) = ۱ - ۰/۱۹۹۱ = ۰/۸۰۰۹$

۱.۵.۵ تقریب توزیع دو جمله‌ای بوسیله توزیع پواسون

اگر در آزمایش دو جمله‌ای n عدد بزرگی باشد و p به صفر نزدیک باشد آنگاه می‌توان توزیع دو جمله‌ای را با توزیع پواسون با پارامتر $\mu = np$ تقریب زد. در حقیقت زمانی که $n \to \infty$ و $p \to ۰$، مقدار $\mu = np$ مقداری ثابت باشد آنگاه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} p^x (۱-p)^{n-x} = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

همچنین اگر p به یک نزدیک باشد می‌توان در آزمایش دو جمله‌ای مفاهیم موفقیت و شکست را با یکدیگر عوض کنیم و در نتیجه تقریب بالا را در این مورد هم بکار ببریم.

مثال ۳.۵.۵ اطلاعات یک شرکت بیمه نشان می‌دهد که ۰/۰۰۱ جمعیت در هر سال از نوع معینی تصادف می‌میرند. احتمال اینکه این شرکت مجبور باشد برای بیشتر از ۱۵ نفر از ۱۰۰۰۰ بیمه گزار شرکتش در مقابل خطرات چنین تصادفهایی در سال مفروض غرامت بپردازد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد بیمه گزارانی در بین ۱۰۰۰۰ نفر باشد که در سال از تصادفی معین می‌میرند آنگاه $X \sim B(۱۰۰۰۰, ۰/۰۰۱)$ است که چون n عددی بزرگ و p به صفر نزدیک

است پس تقریباً $X\sim P(۱۰)$ که در آن $\mu=np=۱۰۰۰۰(۰/۰۰۱)=۱۰$ بنابراین

$$P(X>۱۵)=۱-P(X\leq ۱۵)\approx ۱-۰/۹۵۱۳=۰/۰۴۸۷$$

۶.۵ توزیع دو جمله‌ای منفی[1]

آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای خواص آزمایش دو جمله‌ای باشد با این تفاوت که آزمایشات مستقل برنولی را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به یک تعداد معینی از موفقیتها دست یابیم. چنین آزمایشی را آزمایش دوجمله‌ای منفی گویند. برای اینکه در این حالت نحوه انجام آزمایش و توزیع احتمال مربوطه را به دست آوریم به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۶.۵ یک تیرانداز ۷۰٪ از تیرهای خود را به هدف می‌زند. احتمال اینکه در ششمین پرتاب چهارمین تیر او به هدف بخورد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد تیرهای پرتاب شده تا رسیدن به چهارمین برخورد به هدف تیرها باشد آنگاه احتمال مورد نظر برابر $P(X=۶)$ است. احتمال $P(X=۶)$ بدین معنی است که در پرتاب ششم تیر به هدف برخورد کند (یعنی موفقیت یا S داشته باشیم) و در ۵ پرتاب اولیه ۳ تیر به هدف برخورد کرده و ۲ تیر به هدف برخورد نکند (یعنی شکست یا F داشته باشیم). یک حالت خاص برای وقوع چنین پیشامدی SFSSFS می‌باشد که احتمال آن برابر است با

$$(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷)(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷)=(۰/۷)^۴(۰/۳)^۲$$

و تعداد حالاتی که می‌توان در ۵ پرتاب اولیه ۳ برخورد به هدف داشته باشیم برابر $\binom{۵}{۳}$ است و

بنابراین
$$P(X=۶)=\binom{۵}{۳}(۰/۷)^۴(۰/۳)^۲=\binom{۶-۱}{۴-۱}(۰/۷)^۴(۰/۳)^{۶-۴}$$

تعریف ۵.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

X = تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به r موفقیت

آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p باشد آنگاه گوئیم X دارای توزیع دو جمله‌ای منفی با پارامترهای r و p است و آن را نماد

1- Negative Bin...

$X\sim NB(r,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای منفی توجه کنید که $P(X=x)$ بدین معنی است که در xامین آزمایش ما یک موفقیت داشته باشیم و در $(x-1)$ آزمایش اولیه ما $(r-1)$ موفقیت و $(x-r)$ شکست داشته باشیم که احتمال آن برابر است با $\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}q^{x-r}p$. بنابراین

تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای منفی
$f_X(x)=\binom{x-1}{r-1}p^rq^{x-r}\quad,\quad x=r,r+1,r+2,\ldots$ (۵.۵)

قضیه ۵.۵ اگر $X\sim NB(r,p)$ آنگاه $E(X)=\frac{r}{p}$ و $Var(X)=\frac{rq}{p^۲}$.

مثال ۲.۶.۵ فرض کنید که ۴۰٪ از ماهیهای یک دریاچه از نوع بخصوصی باشند. اگر هر بار یک ماهی گرفته و نوع آن را مشخص کرده و دوباره به دریاچه برگردانیم.

الف- انتظار دارید که در چندمین صید ماهی، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود؟

ب- احتمال اینکه در دهمین بار، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد صید ماهی تا رسیدن به چهارمین ماهی نوع بخصوص باشد آنگاه $X\sim NB(۴,۰/۴)$ و در نتیجه

الف- $E(X)=\frac{r}{p}=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰$

پس انتظار داریم در دهمین صید، چهارمین ماهی از نوع فوق صید شود.

ب- $P(X=۱۰)=f_X(۱۰)=\binom{۱۰-۱}{۴-۱}(۰/۴)^۴(۰/۶)^{۱۰-۴}=۰/۱۰۰۳$

۷.۵ توزیع هندسی[1]

اگر در توزیع دو جمله‌ای منفی r=1 باشد آنگاه یک توزیع احتمال برای تعداد آزمایشات تا رسیدن به یک موفقیت را به دست می‌آوریم. این نوع آزمایش را آزمایش هندسی گویند و توزیع مربوطه را توزیع هندسی گویند. برای مثال پرتاب یک سکه تا رسیدن به یک شیر یک آزمایش هندسی است.

تعریف ۶.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود

1- Geometric Distribution

تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به یک موفقیت = X

آنگاه X را یک متغیر تصادفی هندسی گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p باشد آنگاه گوئیم X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و آن را با نماد $X\sim G(p)$ نمایش می‌دهیم و تابع احتمال آن عبارت است از

(۶.۵) تابع احتمال توزیع هندسی $$f_X(x)=pq^{x-1}\ ,\quad x=1,2,3,\dots$$

مثال ۱.۷.۵ فرض کنید احتمال قبولی یک نفر در امتحان رانندگی ۰/۷ باشد. احتمال اینکه این شخص در امتحان رانندگی (الف) در مرتبه سوم، (ب) حداکثر در سومین بار قبول شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد امتحانهای رانندگی شخص تا قبول شدن باشد آنگاه $X\sim G(0/7)$. بنابراین

الف- $$P(X=3)=f_X(3)=(0/7)(0/3)^{3-1}=0/063$$

ب- $$P(X\le 3)=1-P(X>3)=1-\sum_{x=4}^{+\infty}(0/7)(0/3)^{x-1}=1-\frac{(0/7)(0/3)^3}{1-0/3}$$
$$=1-(0/3)^3=0/973$$

قضیه ۶.۵ اگر $X\sim G(p)$ آنگاه

$$E(X)=\frac{1}{p}\ ,\quad Var(X)=\frac{q}{p^2}\ ,\quad P(X\le r)=1-q^r$$

۸.۵ توزیع یکنواخت گسسته[1]

ساده‌ترین توزیع احتمال گسسته توزیعی است که در آن متغیر تصادفی گسسته X تمام مقادیرش را با احتمالات یکسان اختیار کند. چنین توزیع احتمالی را توزیع یکنواخت گسسته گویند.

تعریف ۷.۵ اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_K$ را با احتمالات یکسان $\frac{1}{K}$ اختیار کند، آنگاه گوئیم X دارای توزیع یکنواخت گسسته با پارامتر K است و آن را با نماد $X\sim DU(K)$ نمایش می‌دهیم و تابع احتمال آن عبارت است از

(۷.۵) تابع احتمال توزیع یکنواخت گسسته $$f_X(x)=P(X=x)=\frac{1}{K}\ ,\quad x=x_1,x_2,\dots,x_K$$

قضیه ۷.۵ اگر $X\sim DU(K)$ آنگاه

$$\mu=E(X)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}x_i$$
$$Var(X)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(x_i-\mu)^2$$

اثبات چون X مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_K$ را با احتمالات یکسان $\frac{1}{K}$ اختیار می‌کند بنابراین از تعریف امید ریاضی و واریانس نتیجه به راحتی به دست می‌آید.

مثال ۱.۸.۵ یک صفحه هدف زنی دایره‌ای شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ متمایز گردیده است. اگر X برابر عددی باشد که تیر در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند، توزیع احتمال X را به دست آورده و میانگین و واریانس X را محاسبه کنید. احتمال اینکه تیر در قطاع با شماره کمتر از ۱۰ برخورد کند را بیابید.

حل $$X\sim DU(15)\ ,\quad f_X(x)=\frac{1}{15}\quad x=1,2,\dots,15$$

$$\mu=E(X)=\frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15}x=\frac{15(15+1)}{2\times 15}=8\ ,\quad \sigma^2=\frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15}(x-8)^2=\frac{56}{3}$$

$$P(X<10)=\sum_{x=1}^{9}f_X(x)=\frac{9}{15}$$

۹.۵ توزیع یکنواخت پیوسته[1]

در بخشهای قبل توزیع احتمال چند متغیر تصادفی گسسته خاص را مورد بررسی قرار دادیم. از این بخش به بعد چند توزیع احتمال پیوسته خاص را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

ساده‌ترین توزیع احتمال پیوسته توزیع یکنواخت (پیوسته) است که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۵ گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله (a,b) است و آن را با نماد

1- Continuous Uni

$X\sim U(a,b)$ نمایش می‌دهیم. هر گاه دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

(۸.۵) تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

تابع توزیع متغیر تصادفی یکنواخت بصورت زیر به دست می‌آید.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & b\le x\end{cases}$$

قضیه ۸.۵ اگر $X\sim U(a,b)$ آنگاه $E(X)=\frac{a+b}{2}$ و $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

اثبات

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{12}$$

مثال ۱.۹.۵ فرض کنید B عددی تصادفی از فاصله $[-3,3]$ باشد. احتمال اینکه معادله درجه دوم $x^2+Bx+1=0$ حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد را بیابید؟

حل $B\sim U(-3,3)$ و تابع احتمال آن عبارت است از $f_B(b)=\frac{1}{6},\ -3<b<3$

برای اینکه معادله فوق حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد بایستی $\Delta=B^2-4\ge 0$. بنابراین

$$P(B^2-4\ge 0)=P(B^2\ge 4)=P(|B|\ge 2)=1-P(-2<B<2)=1-\int_{-2}^{2}\frac{1}{6}dx=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

۱۰.۵ توزیع نمایی(۱)

توزیع نمایی یکی از توزیعهای مهم آماری است که در زیر آن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹.۵ گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است و آن را با نماد $X\sim E(\theta)$ نمایش می‌دهیم، هر گاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

(۹.۵) تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x>0,\ \theta>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

معمولاً اگر متغیر تصادفی X نمایانگر طول عمر یک قطعه باشد آنگاه می‌توان X را متغیر تصادفی نمایی در نظر گرفت، توزیع نمایی در آمار کاربرد فراوان دارد. از جمله کاربردهای آن در نظریه اعتماد، نظریه صف و زمان انتظار می‌باشد. در قضیه زیر امید و واریانس این توزیع را به دست می‌آوریم.

قضیه ۹.۵ اگر $X\sim E(\theta)$ آنگاه $E(X)=\theta$ و $Var(X)=\theta^2$.

اثبات

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\left(\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\right)dx=\left[(-x-\theta)e^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty}=\theta$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\left(\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\right)dx=\left[(-x^2-2x\theta-2\theta^2)e^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty}=2\theta^2$$

$$Var(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

مثال ۱.۱۰.۵ فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک برحسب ساعت باشد که دارای توزیع نمایی با میانگین ۵۰۰ ساعت است. اگر بدانیم که طول عمر یک لاستیک از این نوع از ۷۰۰ ساعت کمتر بوده است، احتمال اینکه طول عمر آن از ۳۰۰ ساعت بیشتر باشد را بیابید.

حل می‌دانیم که $X\sim E(500)$ بنابراین

$$P(X>300\mid X<700)=\frac{P(X>300,X<700)}{P(X<700)}=\frac{P(300<X<700)}{P(X<700)}=\frac{\int_{300}^{700}\frac{1}{500}e^{-\frac{x}{500}}dx}{\int_0^{700}\frac{1}{500}e^{-\frac{x}{500}}dx}=\frac{0/3022}{0/7534}=0/4011$$

مثال ۲.۱۰.۵ طول عمر هر دستگاه کامپیوتر دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۷۰۰ ساعت ... احتمال اینکه حداقل دو دستگاه از آنها

قبل از ۱۷۰۰ ساعت خراب شوند را بیابید.

حل قرار می‌دهیم

$X =$ طول عمر یک دستگاه کامپیوتر برحسب ساعت

$Y =$ تعداد دستگاههای کامپیوتر در بین ۲۰ دستگاه که دارای طول عمر کمتر از ۱۷۰۰ ساعت هستند

در این صورت $X \sim E(۱۷۰۰)$ و $Y \sim B(۲۰, p)$ که در آن

$$p = P(X < ۱۷۰۰) = \int_{۰}^{۱۷۰۰} \frac{۱}{۱۷۰۰} e^{-\frac{x}{۱۷۰۰}} dx = ۱ - e^{-۱} = ۰/۶۳۲۱$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(Y \geq ۲) = ۱ - P(Y < ۲) = ۱ - \{f_Y(۰) + f_Y(۱)\}$$

$$= ۱ - \left\{ \binom{۲۰}{۰} (۰/۶۳۲۱)^{۰} (۰/۳۶۷۹)^{۲۰} + \binom{۲۰}{۱} (۰/۶۳۲۱)^{۱} (۰/۳۶۷۹)^{۱۹} \right\} = ۰/۹۹۹۹$$

۵.۱۰.۱ رابطه توزیع نمایی و توزیع پواسون

در بخش ۵ دیدیم که یک آزمایش پواسون یک مدل مناسب برای توزیع تعداد اتفاقات (موفقیتها) در یک زمان معین می‌باشد. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که در یک آزمایش پواسون توزیع زمان طی شده تا وقوع اولین اتفاق و یا توزیع زمان طی شده بین دو اتفاق متوالی از یک توزیع نمایی پیروی می‌کند.

در یک آزمایش پواسون با پارامتر μ، که μ میانگین تعداد اتفاقات در یک واحد زمانی است، قرار می‌دهیم:

$X =$ تعداد اتفاقات درفاصله زمانی $[۰,t]$

$Y =$ زمان تا رسیدن به اولین اتفاق

در این صورت طبق خاصیت دوم آزمایش پواسون $X \sim P(\mu t)$ و همچنین

$$P(Y > t) = P(X = ۰) = e^{-\mu t}$$

بنابراین

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = ۱ - e^{-\mu t}$$

و در نتیجه

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \mu e^{-\mu t} \quad t > ۰$$

پس $Y \sim E(\frac{۱}{\mu})$. یعنی در یک آزمایش پواسون با میانگین μ زمان تا رسیدن به اولین اتفاق دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{۱}{\mu}$ است. این مطلب را می‌توان برای زمان بین دو اتفاق متوالی به طور مشابه اثبات کرد.

مثال ۵.۱۰.۳ به طور متوسط تعداد ۵ تلفن [illegible] زده می‌شود.

الف- احتمال اینکه در یک ساعت حداقل ۲ تلفن زده شود را بیابید.

ب- احتمال اینکه تلفن بعدی لااقل بعد از ۱۵ دقیقه زده شود را بیابید.

ج- احتمال اینکه تلفن بعدی قبل از ۱۰ دقیقه زده شود را بیابید.

حل الف- اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد تلفنهایی باشد که در یک ساعت به شرکت زده می‌شود، آنگاه $X \sim P(۵)$ و بنابراین

$$P(X \geq ۲) = ۱ - P(X \leq ۱) = ۱ - ۰/۰۴۰۴ = ۰/۹۵۹۶$$

ب- اگر متغیر تصادفی Y برابر زمان بین دو تلفن متوالی برحسب ساعت باشد آنگاه $Y \sim E(\frac{۱}{۵})$ و بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

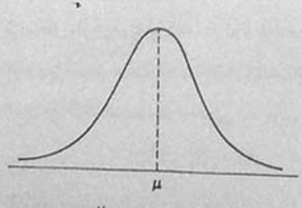
$$P(Y > \frac{۱}{۴}) = \int_{\frac{۱}{۴}}^{+\infty} ۵e^{-۵y} dy = e^{-\frac{۵}{۴}} = ۰/۲۸۶۵$$

ج-

$$P(Y < \frac{۱}{۶}) = \int_{۰}^{\frac{۱}{۶}} ۵e^{-۵y} dy = ۱ - e^{-\frac{۵}{۶}} = ۰/۵۶۵۴$$

۵.۱۱ توزیع نرمال(۱)

مهمترین توزیع پیوسته در آمار و احتمال توزیع نرمال است. نمودار این توزیع در شکل (۵.۱) رسم شده است و کاملاً نسبت به یک حد متوسط μ متقارن است و به آن منحنی نرمال گوئیم. اغلب متغیرهای تصادفی پیوسته در طبیعت و صنعت دارای نمودار توزیع به‌فرم فوق می‌باشند. نمودار منحنی نرمال بستگی به دو پارامتر μ و σ^2 دارد و در زیر خواهیم دید که μ میانگین توزیع و σ^2 واریانس توزیع می‌باشد.



شکل ۵.۱ منحنی نرمال

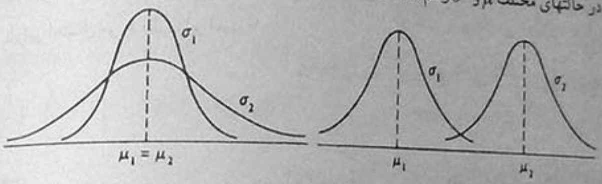
تعریف ۵.۱۰ گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است و آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نمایش می‌دهیم، هر گاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

1- Normal Distribution

تابع چگالی احتمال توزیع نرمال

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty<x<+\infty,\ \mu\in R\ ,\ \sigma>0 \qquad (10.5)$$

منحنی نرمال کاملاً بوسیله مقادیر μ و σ^2 مشخص می‌شود. با افزایش σ^2 پراکندگی توزیع افزایش می‌یابد و با افزایش μ منحنی به سمت راست انتقال پیدا می‌کند. در شکل ۲.۵ منحنی نرمال در حالتهای مختلف μ و σ^2 رسم شده است.



شکل ۲.۵ -الف منحنی‌های نرمال با $\mu_1<\mu_2\ ,\ \sigma_1=\sigma_2$

شکل ۲.۵ -ب منحنی‌های نرمال با $\mu_1=\mu_2\ ,\ \sigma_1<\sigma_2$

خواص منحنی نرمال با استفاده از فرم تابع چگالی نرمال و همچنین نمودار آن خواص زیر را در مورد منحنی نرمال می‌توان بیان و اثبات کرد (اثبات به عنوان تمرین)

۱ـ منحنی تنها دارای یک نقطه ماکزیمم در نقطه $x=\mu$ است.

۲ـ منحنی دارای دو نقطه عطف در نقاط $x=\mu\pm\sigma$ است.

۳ـ منحنی نسبت به خط $x=\mu$ متقارن است، یعنی $f_X(\mu-a)=f_X(\mu+a)$

۴ـ در دو طرف حد متوسط μ منحنی به مجانب خود یعنی محور xها نزدیک می‌شود، یعنی

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_X(x)=0$$

۵ـ سطح محصور بین منحنی و محور طولها برابر یک واحد است، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

۱.۱۱.۵ توزیع نرمال استاندارد

توزیع نرمالی که میانگین آن صفر و واریانس آن یک باشد را توزیع نرمال استاندارد می‌نامند و آن را با نماد $Z\sim N(0,1)$ نمایش می‌دهند. تابع چگالی احتمال توزیع نرمال استاندارد را با $\varphi(z)$ و تابع توزیع آن را با $\Phi(z)$ نمایش می‌دهند بنابراین

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty<z<+\infty \quad , \quad \Phi(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(t)dt$$

در زیر خواص این توزیع و رابطه آن با توزیعهای نرمال غیراستاندارد را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۵ اگر $Z\sim N(0,1)$ آنگاه $E(Z)=0$ و $Var(Z)=1$.

اثبات

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0-0=0$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم که

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=0+1=1$$

بنابراین $Var(Z)=1-(0)^2=1$.

قضیه ۱۱.۵ اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

اثبات

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le z\right)=P(X\le \mu+\sigma z)=F_X(\mu+\sigma z)$$

بنابراین

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{d}{dz}F_X(\mu+\sigma z)=\sigma F_X(\mu+\sigma z)$$

یعنی

$$f_Z(z)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu+\sigma z-\mu)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}=\varphi(z)$$

و در نتیجه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

قضیه ۱۲.۵ اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه $E(X)=\mu$ و $Var(X)=\sigma^2$.

اثبات طبق قضیه ۱۱.۵ داریم که $X=\mu+\sigma Z$ که $Z\sim N(0,1)$ بنابراین طبق خواص امید ریاضی و واریانس داریم که

$$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu+\sigma E(Z)=\mu$$

$$Var(X)=Var(\mu+\sigma Z)=\sigma^2 Var(Z)=\sigma^2$$

۲.۱۱.۵ سطح زیر منحنی نرمال

همانگونه که در فصل سوم مشاهده کردیم در توزیعهای پیوسته احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی پیوسته X در یک فاصله (a,b) برابر سطح زیر منحنی تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ از a تا

b است که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$$

در توزیع نرمال به واسطه پیچیده بودن فرم تابع چگالی احتمال، نمی‌توان به روشهای معمول این انتگرال را محاسبه کرد. به این منظور در توزیع نرمال استاندارد این نوع انتگرالها بوسیله روشهای محاسبات عددی محاسبه و در جدولی ارایه می‌گردد و سپس با استفاده از قضیه ۱۱.۵ این مساحتها در هر توزیع نرمالی محاسبه می‌گردد.

برای محاسبه احتمالات در توزیع نرمال استاندارد جدول (III) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $\Phi(z)=P(Z\le z)$ برای مقادیر $-۳/۵\le z\le ۳/۵$ محاسبه شده است. برای مثال از جدول (III) احتمالات زیر را به دست می آوریم.

$$P(Z\le ۲/۳۵)=\Phi(۲/۳۵)=۰/۹۹۰۶$$

$$P(Z>-۱/۴)=۱-P(Z\le -۱/۴)=۱-\Phi(-۱/۴)=۱-۰/۰۸۰۸=۰/۹۱۹۲$$

$$P(-۰/۵۵<Z\le ۱/۷)=P(Z\le ۱/۷)-P(Z\le ۰/۵۵)$$

$$=\Phi(۱/۷)-\Phi(-۰/۵۵)=۰/۹۵۵۴-۰/۲۹۱۲=۰/۶۶۴۲$$

حال اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد آنگاه طبق قضیه ۱۱.۵، $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(۰,۱)$ و بنابراین از این رابطه می‌توان برای محاسبه احتمالات در هر توزیع نرمالی استفاده کرد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱۱.۵ اگر $X\sim N(۱۰,۱۶)$ باشد $P(۸<X\le ۱۵)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $\mu=۱۰$ و $\sigma^2=۱۶$ است. باکم کردن مقدار μ از سه طرف نامساوی درون پرانتز و تقسیم سه طرف بر عدد مثبت σ داریم که

$$P(۸<X\le ۱۵)=P\left(\frac{۸-۱۰}{۴}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{۱۵-۱۰}{۴}\right)=P(-۰/۵<Z\le ۱/۲۵)$$

$$=P(Z\le ۱/۲۵)-P(Z\le -۰/۵)=\Phi(۱/۲۵)-\Phi(-۰/۵)$$

$$=۰/۸۹۴۴-۰/۳۰۸۵=۰/۵۸۵۹$$

مثال ۲.۱۱.۵ قطر داخلی پیستونهایی که توسط یک کارخانه ساخته می‌شود، دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۰ میلیمتر و انحراف معیار ۰/۰۲ میلیمتر است. احتمال اینکه قطر داخلی یک پیستون بیش از ۲۹/۹۸ میلیمتر باشد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X اندازه قطر داخلی پیستون برحسب میلیمتر باشد آنگاه $X\sim N(۳۰,۰/۰۲^2)$ و بنابراین

$$P(X>۲۹/۹۸)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۲۹/۹۸-۳۰}{۰/۰۲}\right)=P(Z>-۱)$$

$$=۱-P(Z\le -۱)=۱-۰/۱۵۸۷=۰/۸۴۱۳$$

مثال ۳.۱۱.۵ یک کارگاه تولید لوله، لوله هایی را تولید می‌کند که طول این لوله‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰/۵ متر می‌باشد. مطلوب است

الف- چند درصد لوله‌ها دارای طولی بین ۷/۵ تا ۹ متر هستند؟

ب- اگر در یک روز این کارگاه ۲۰۰ لوله تولید کند، چه تعداد از این لوله‌ها طولی بیش از ۹/۲ متر دارند؟

ج- ۹۷/۵٪ از لوله‌های تولید شده در این کارگاه طولشان از چه مقداری کمتر است؟

د- اگر در یک روز بدانیم که طول لوله‌های تولید شده در این کارگاه حداقل ۷/۸ متر بوده است، چند درصد لوله‌های تولید شده در این روز طولی کمتر از ۸/۴ متر دارند.

هـ- اگر ۵ لوله را یک به یک و با جایگذاری انتخاب کرده و اندازه‌گیری کنیم احتمال اینکه حداکثر یک عدد از آنها دارای طولی بیش از ۹ متر باشد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X را برابر طول لوله تولید شده برحسب متر در نظر بگیریم آنگاه $X\sim N(۸,۰/۵^2)$ و بنابراین

الف- برای محاسبه درصد بایستی احتمال مورد نظر را در ۱۰۰٪ ضرب کنیم، بنابراین

$$P(۷/۵<X<۹)=\left(\frac{۷/۵-۸}{۰/۵}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۹-۸}{۰/۵}\right)=P(-۱<Z<۲)$$

$$=\Phi(۲)-\Phi(-۱)=۰/۹۷۷۲-۰/۱۵۸۷=۰/۸۱۸۵$$

بنابراین درصد مورد نظر برابر است با ۸۱/۸۵٪ = (۱۰۰٪) ۰/۸۱۸۵

ب- برای محاسبه تعداد بایستی احتمال موردنظر را در تعداد ۲۰۰ لوله ضرب کنیم، بنابراین

$$P(X>۹/۲)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۹/۲-۸}{۰/۵}\right)=P(Z>۲/۴)=۱-P(Z\le ۲/۴)$$

$$=۱-۰/۹۹۱۸=۰/۰۰۸۲$$

$$\text{تعداد موردنظر} = ۰/۰۰۸۲ \times ۲۰۰ = ۱/۶۴ \approx ۲$$

بنابراین

پس تقریباً ۲ لوله دارای طولی بیش از ۹/۲ متر هستند.

ج- فرض کنید مقدار موردنظر a باشد بنابراین بایستی $P(X<a)=۰/۹۷۵$ و در نتیجه

$$۰/۹۷۵ = P(X<a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-۸}{۰/۵}\right) = P\left(Z < \frac{a-۸}{۰/۵}\right) = \Phi\left(\frac{a-۸}{۰/۵}\right)$$

بنابراین با استفاده از جدول (III) داریم که

$$\frac{a-۸}{۰/۵} = ۱/۹۶ \Rightarrow a = ۸ + ۰/۵(۱/۹۶) = ۸/۹۸$$

د-

$$P(X<۸/۴ \mid X\geq ۷/۸) = \frac{P(۷/۸\leq X<۸/۴)}{P(X\geq ۷/۸)} = \frac{P(-۰/۴\leq Z<۰/۸)}{P(Z\geq -۰/۴)}$$

$$= \frac{\Phi(۰/۸)-\Phi(-۰/۴)}{۱-\Phi(-۰/۴)} = \frac{۰/۷۸۸۱-۰/۳۴۴۶}{۱-۰/۳۴۴۶} = ۰/۶۷۶۷$$

بنابراین درصد موردنظر برابر است با ٪۶۷/۶۷ = (٪۱۰۰) ۰/۶۷۶۷

ه- اگر متغیر تصادفی Y برابر تعداد لوله‌هایی در بین ۵ لوله باشد که دارای طولی بیش از ۹ متر باشند آنگاه $Y\sim B(۵,p)$ که در آن

$$p=P(X>۹) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{۹-۸}{۰/۵}\right) = P(Z>۲) = ۱-P(Z\leq ۲) = ۱-۰/۹۷۷۲ = ۰/۰۲۲۸$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(Y\leq ۱) = f_Y(۰)+f_Y(۱) = \binom{۵}{۰}(۰/۰۲۲۸)^{۰}(۰/۹۷۷۲)^{۵} + \binom{۵}{۱}(۰/۰۲۲۸)^{۱}(۰/۹۷۷۲)^{۴} = ۰/۹۹۵$$

۳.۱۱.۵ تقریب توزیع دوجمله‌ای بوسیله توزیع نرمال

احتمالات مربوط به توزیع دوجمله‌ای را بـه راحـتی مـی‌توان از تـابع احـتمال تـوزیع دوجمله‌ای و یا به وسیله جدول (I) محاسبه کرد. اما اگر n عدد بزرگی باشد، دیگر نمی‌توان از این جدول استفاده کرد. برای nهای بزرگ می‌توان توزیع دوجمله‌ای را بوسیله توزیع نرمال تـوسط قضیه زیر تقریب زد.

قضیه ۱۳.۵ اگر X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با میانگین $\mu = np$ و واریانس $\sigma^2 = npq$ باشد آنگاه توزیع حدی $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ موقعی که $n\to+\infty$ یک توزیع نرمال استاندارد است.

معمولاً اگر $n\geq ۳۰$ باشد و یا مقدار p به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک باشد، تقریب توزیع دوجمله‌ای بوسیله توزیع نرمال یک تقریب مناسب می‌باشد. همچنین چون توزیع دوجمله‌ای یک توزیع گسسته و توزیع نرمال یک توزیع پیوسته است، در موقع تقریب زدن بایستی در محاسبه احتمالات از عمل تصحیح پیوستگی به صورت زیر استفاده کنیم.

$$P(X=K)=P(K-\tfrac{۱}{۲}<X<K+\tfrac{۱}{۲}) \quad , \quad P(X\leq K)=P(X<K+\tfrac{۱}{۲})$$

مثال ۴.۱۱.۵ اگر $X\sim B(۲۰, ۰/۶)$ باشد، احتمال $P(۱۰\leq X\leq ۱۴)$ را به صورت دقیق و تقریبی محاسبه کنید.

حل با استفاده از جدول (I) مقدار دقیق برابر است با

$$P(۱۰\leq X\leq ۱۴)=P(X\leq ۱۴)-P(X\leq ۹)=۰/۸۷۴۴-۰/۱۲۷۵=۰/۷۴۶۹$$

همچنین چون $\mu=np=۲۰(۰/۶)=۱۲$ و $\sigma^2=npq=۲۰(۰/۶)(۰/۴)=۴/۸$ پس مقدار تقریبی با استفاده از عمل تصحیح پیوستگی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$P(۱۰\leq X\leq ۱۴)=P(۹/۵<X<۱۴/۵)=P\left(\frac{۹/۵-۱۲}{\sqrt{۴/۸}}<\frac{X-np}{\sqrt{npq}}<\frac{۱۴/۵-۱۲}{\sqrt{۴/۸}}\right)$$

$$\approx P(-۱/۱۴<Z<۱/۱۴)=\Phi(۱/۱۴)-\Phi(-۱/۱۴)$$

$$=۰/۸۷۲۹-۰/۱۲۷۱=۰/۷۴۵۸$$

که اختلاف این دو مقدار ۰/۰۰۱۱ می‌باشد.

مثال ۵.۱۱.۵ احتمال اینکه یک قطعه الکترونیکی در کمتر از ۱۰۰۰ ساعت استفاده مداوم از کار بیفتد، برابر ۰/۲۵ است. احتمال اینکه در بین ۲۰۰ عدد از این قطعات کمتر از ۴۵ قطعه در کمتر ۱۰۰۰ ساعت استفاده مداوم از کار بیفتند را بیابید.

حل اگر X تعداد قطعات الکترونیکی در بین ۲۰۰ قطعه باشد که در کمتر از ۱۰۰۰ ساعت استفاده مداوم از کار می‌افتند، آنگاه $X\sim B(۲۰۰, ۰/۲۵)$ و بنابراین

$$P(X<۴۵)=P(X<۴۴/۵)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}}<\frac{۴۴/۵-۵۰}{\sqrt{۳۷/۵}}\right)\approx P(Z<-۰/۹)=۰/۱۸۴۱$$

۴.۱۱.۵ توزیع مجموع متغیرهای تصادفی نرمال

در بعضی مسایل نیاز به محاسبه توزیع مجموعی از چند متغیر تصادفی نرمال مستقل داریم که این توزیع در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۱۴.۵ اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

و قرار دهیم $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ در این صورت

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right) \qquad (11.5)$$

مثال ۶.۱۱.۵ نمره یک درس در امتحان میان ترم دارای میانگین ۵ و انحراف معیار ۳ و در امتحان پایان ترم دارای میانگین ۶ و انحراف معیار ۴ می‌باشد. فرض کنید نمرات دو امتحان از یکدیگر مستقل بوده و هر یک دارای توزیع نرمال باشند. شخصی در این درس قبول می‌شود که ۲ برابر نمره میان ترم او بعلاوه ۲ برابر نمره پایان ترم او از ۱۸ کمتر نباشد. اگر در این درس ۵۰ نفر ثبت نام کرده باشند، چند نفر آنها رد می‌شوند؟

حل اگر متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به ترتیب نمرات امتحان شخص در میان ترم و پایان ترم باشد و Y نمره کل او باشد آنگاه

$$X_1 \sim N(5, 3^2) \quad , \quad X_2 \sim N(6, 4^2)$$

$$Y = 2X_1 + 2X_2 \sim N\left(2(5) + 2(6), 2^2(3^2) + 2^2(4^2)\right)$$

بنابراین $Y \sim N(22, 100)$ و در نتیجه

$$P(Y < 18) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{18-22}{10}\right) = P(Z < -0.4) = 0.3446$$

بنابراین تعدادی که در این درس رد می‌شوند برابر است با $0.3446 \times 50 = 17.23 \approx 17$

۱۲.۵ مسائل حل شده

مثال ۱.۱۲.۵ یک تولید کننده قطعات کوچک، اجناس خود را در بسته‌های ۲۰ تایی برای مصرف

کنندگانش می‌فرستد. فرض کنید هر قطعه یا معیوب است و یا سالم و احتمال معیوب بودن هر قطعه ۰/۰۵ می‌باشد.

الف- به طور متوسط در هر بسته چند قطعه معیوب وجود دارد؟

ب- احتمال اینکه بسته دلخواهی شامل هیچ قطعه معیوبی نباشد را بیابید.

حل اگر X برابر تعداد قطعات معیوب در بین ۲۰ قطعه یک بسته باشد آنگاه $X \sim B(20, 0.05)$ و بنابراین

الف- $\mu = E(X) = np = 20(0.05) = 1$

ب- $P(X=0) = f_X(0) = \binom{20}{0}(0.05)^0(0.95)^{20} = 0.358$

مثال ۲.۱۲.۵ احتمال آنکه شدت نسبی احساس صوت یک تقویت کننده بیشتر از ۲ دسیبل (dB) باشد برابر ۰/۰۵ است. احتمال اینکه در بین ۱۰ عدد از این تقویت کننده‌ها که به طور مستقل انتخاب شوند

الف- یک تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشد؟

ب- حداکثر ۲ تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشند؟

ج- حداقل ۲ تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشند؟

حل اگر X برابر تعداد تقویت کننده‌هایی در بین ۱۰ تقویت کننده باشند که دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشد آنگاه $X \sim B(10, 0.05)$ و بنابراین

الف- $P(X=1) = f_X(1) = \binom{10}{1}(0.05)^1(0.95)^9 = 0.315$

ب- $P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x}(0.05)^x(0.95)^{10-x} = 0.9885$

ج- $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} f_X(x)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{10}{x}(0.05)^x(0.95)^{10-x} = 0.0861$$

مثال ۳.۱۲.۵ فرض کنید ۸۰٪ لامپهای ساخته شده توسط یک کارخانه معیوب باشد. اگر ۱۵ عدد از لامپها را به تصادف انتخاب کنیم، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه

الف - اگر ۹۷/۵ درصد از کالاها کمتر از ۲۹/۸ دقیقه مونتاژ شوند مقدار σ را تعیین کنید.

ب - $P(|X-10|<5)$ را محاسبه کنید.

ج - اگر ۳ عدد از این کالا به طور مستقل و همزمان مونتاژ شوند، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها کمتر از ۲۰ دقیقه مونتاژ شود را بیابید.

۶۸ در یک هتل متقاضیان به طور متوسط ۵ نفر در ساعت مراجعه می‌کنند. فرض کنید تا ۱۰ دقیقه قبل هنوز متقاضی نیامده باشد.

الف - احتمال اینکه متقاضی بعدی کمتر از ۲ دقیقه دیگر بیاید را بیابید.

ب - احتمال اینکه فاصله زمانی آمدن دهمین و یازدهمین متقاضی از دو دقیقه تجاوز نکند را بیابید.

۶۹ فرض کنید طول عمر لامپهای روشنایی شرکتی معین دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ ساعت باشد. همچنین فرض کنید طول عمر لامپهای ساخت شرکتی دیگر نیز دارای توزیع نرمال با میانگین ۹۰۰ و انحراف معیار ۱۵۰ ساعت باشد. اگر از هر یک از این شرکتها یک لامپ خریداری شود، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها ۹۸۰ ساعت یا بیشتر عمر کند را بیابید.

فصل ششم

توزیعهای نمونه‌ای

۱.۶ نمونه تصادفی و توزیع نمونه‌ای

همانگونه که در فصل اول اشاره شد آمار به عنوان یک موضوع علمی، شامل مفاهیم و روشهایی جهت جمع آوری، سازماندهی و خلاصه کردن داده‌های به دست آمده از قسمتی از یک جمعیت و انجام استنباط و نتیجه گیری از روی آنها در مورد کل جمعیت می‌باشد.

در هر مطالعه آماری با مجموعه افراد یا اشیاء سر و کار داریم که هدف از مطالعه کسب اطلاعات در مورد آنها می‌باشد. این مجموعه را اصطلاحاً **جمعیت** و افراد یا اشیاء تشکیل دهنده آن را اعضاء یا عناصر جمعیت گویند. در بسیاری موارد به علت پرهزینه بودن، وقت‌گیر بودن و... اطلاعات فقط از قسمتی از جمعیت جمع آوری می‌گردد و بر اساس اطلاعات حاصله از این قسمت استنباط هایی در مورد تمام جمعیت انجام می‌گیرد. انتخاب قسمتی از جمعیت را **نمونه گیری** و قسمت انتخاب شده را یک **نمونه** گویند.

در این فصل برخی از مفاهیم نمونه‌گیری که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را می‌آوریم.

نمونه تصادفی

در مبحث نمونه‌گیری معمولاً جمعیت را با یک متغیر تصادفی X نمایش می‌دهند که این متغیر تصادفی X دارای یک توزیع احتمال بخصوص $f_X(x)$ است. این توزیع احتمال را توزیع احتمال جمعیت گویند. برای مثال اگر جمعیت لامپهای تولیدی یک کارخانه باشد و بخواهیم

مطالعه‌ای روی طول عمر لامپها داشته باشیم آنگاه X را طول عمر لامپ تولیدی کارخانه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $X\sim E(\theta)$. همچنین اگر جمعیت نوزادان باشند و بخواهیم روی قد نوزادان مطالعه‌ای انجام دهیم، در این صورت X را طول قد نوزاد در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. حال فرض کنید بخواهیم از این جمعیت یک نمونه به اندازه n انتخاب کنیم. اگر مقدار اولین عضو انتخابی را با X_1 و مقدار دومین عضو انتخابی را با X_2 و... و مقدار nامین عضو انتخابی را X_n نمایش دهیم در این صورت نمونه ما به صورت X_1، X_2، ...، و X_n می‌باشد که هر کدام دارای همان توزیع احتمال جمعیت یعنی $f_X(x)$ می‌باشند و از یکدیگر مستقل هستند. این نمونه را **نمونه تصادفی** گویند. برای مثال اگر در اندازه‌گیری قد نوزادان نمونه‌ای از ۳ نوزاد انتخاب کرده و اندازه قد نوزاد iام را با X_i $(i=1,2,3)$ نشان دهیم آنگاه X_1، X_2 و X_3 نمونه تصادفی ما را تشکیل می‌دهند که هر کدام دارای همان توزیع جمعیت یعنی $N(\mu,\sigma^2)$ هستند. اگر پس از اندازه‌گیری روی ۳ نوزاد مقادیر $x_1=45$ و $x_2=50$ و $x_3=47$ سانتیمتر را به دست آوریم آنگاه x_1، x_2 و x_3 را مقادیر مشاهده شده این نمونه تصادفی گویند.

برای درک مفهوم نمونه تصادفی به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱.۶ چهار مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد. می‌خواهیم یک نمونه تصادفی به اندازه n=۲ از این مهره‌ها انتخاب کنیم. اگر متغیر تصادفی X نمایانگر شماره روی یک مهره انتخابی باشد آنگاه X دارای تابع احتمال یکنواخت زیر است

x	۱	۲	۳	۴
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

اگر X_1 و X_2 به ترتیب نمونه‌های انتخاب شده در مرتبه اول و دوم باشند آنگاه تعداد نمونه‌های تصادفی ممکن به فرم (X_1,X_2) برابر $16=4^2$ است که هر کدام دارای شانس یکسان $\frac{1}{16}$ برای انتخاب شدن می‌باشند. در جدول ۱.۶ نمونه‌های مختلف همراه با احتمالات آنها آورده شده است.

شماره نمونه	(x_1,x_2)	$\bar{x}$	احتمال	شماره نمونه	(x_1,x_2)	$\bar{x}$	احتمال
۱	(۱,۱)	۱	$\frac{1}{16}$	۹	(۳,۱)	۲	$\frac{1}{16}$
۲	(۱,۲)	۱/۵	$\frac{1}{16}$	۱۰	(۳,۲)	۲/۵	$\frac{1}{16}$
۳	(۱,۳)	۲	$\frac{1}{16}$	۱۱	(۳,۳)	۳	$\frac{1}{16}$
۴	(۱,۴)	۲/۵	$\frac{1}{16}$	۱۲	(۳,۴)	۳/۵	$\frac{1}{16}$
۵	(۲,۱)	۱/۵	$\frac{1}{16}$	۱۳	(۴,۱)	۲/۵	$\frac{1}{16}$
۶	(۲,۲)	۲	$\frac{1}{16}$	۱۴	(۴,۲)	۳	$\frac{1}{16}$
۷	(۲,۳)	۲/۵	$\frac{1}{16}$	۱۵	(۴,۳)	۳/۵	$\frac{1}{16}$
۸	(۲,۴)	۳	$\frac{1}{16}$	۱۶	(۴,۴)	۴	$\frac{1}{16}$

جدول ۱.۶ جدول نمونه‌های ۲ تایی ممکنه از جمعیت ۴ تایی

مشاهده می‌شود که عناصر اول و دوم نمونه تصادفی یعنی X_1 و X_2 قبل از اینکه مشاهده شوند به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ را با توابع احتمال زیر اختیار می‌کنند

x_i	۱	۲	۳	۴
$f_{X_i}(x_i)=P(X_i=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$i=1,2$

که دقیقاً همان توزیع احتمال جمعیت یعنی متغیر تصادفی X می‌باشد.

تعریف ۱.۶ فرض کنید متغیر تصادفی X نمایانگر یک جمعیت با توزیع احتمال $f_X(x)$ باشد. یک نمونه تصادفی به اندازه n از این جمعیت عبارت است از جمع آوری n متغیر تصادفی مستقل X_1، X_2، ...، و X_n که هر کدام دارای توزیع احتمال $f_X(x)$ هستند. مقادیر مشاهده شده این نمونه تصادفی را با x_1، x_2، ... و x_n نمایش می‌دهند.

پارامتر و آماره

هر ویژگی یک جمعیت را یک پارامتر جمعیت و یا به اختصار پارامتر گویند و ویژگی

متناظر را در نمونه آماره می‌نامند. به عنوان مثال میانگین جمعیت μ یک پارامتر جمعیت است در حالی که اگر از جمعیت نمونه‌گیری کرده و میانگین نمونه $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ را محاسبه کنیم، این میانگین نمونه یک آماره است. به عبارت دقیقتر یک آماره تابعی از نمونه تصادفی است که به پارامتر مجهول بستگی ندارد. توجه کنید که مقدار آماره از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند ولی مقدار پارامتر جمعیت همواره ثابت است. برای مثال در مثال ۱.۱.۶ میانگین جمعیت مقداری ثابت و برابر است با

$$\mu=E(X)=\sum_{x=1}^{4}xf_X(x)=\frac{1}{4}(1+2+3+4)=2.5$$

در حالی که میانگین نمونه $\overline{X}$ بسته به اینکه چه نمونه‌ای استخراج شده باشد متغیر خواهد بود.

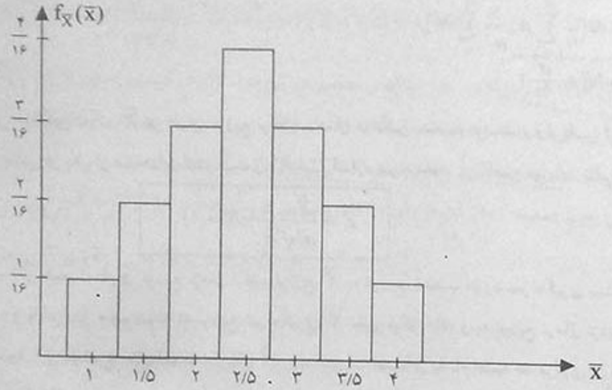
در آمار با انجام نمونه‌گیری و به دست آوردن نمونه تصادفی X_1، X_2،...، و X_n آماره‌هایی مانند $\overline{X}$ و $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ را به عنوان میانگین و واریانس نمونه محاسبه کرده و از روی این آماره‌ها استنباط‌هایی در مورد پارامترهای جمعیت مانند میانگین جمعیت μ و واریانس جمعیت σ^2 انجام می‌دهیم.

توزیع نمونه‌ای

آماره که تابعی از نمونه تصادفی است خود نیز یک متغیر تصادفی است. هر چند در هر وضعیت مفروض فقط با یک نمونه و یا یک مجموعه از مشاهدات سر و کار داریم و آماره مورد نظر فقط یک مقدار متناظر را دارد، ولی با نمونه های مختلف مقدار آماره مطابق با توزیعی که از روی توزیع نمونه تصادفی معین می‌شود، تغییر می‌کند. نکته مهم این است که رفتار آماره را می‌توان بوسیله یک توزیع احتمال توصیف کرد. بنابراین هر آماره یک متغیر تصادفی است و توزیع احتمال آن را توزیع نمونه‌ای گویند.

مثال ۲.۱.۶ در مثال ۱.۱.۶ بر اساس اطلاعات به دست آمده از انتخاب نمونه دو تایی می‌خواهیم میانگین جمعیت μ را حدس بزنیم. برای این منظور شاید بهترین حدس میانگین نمونه دوتایی یعنی $\overline{X}$ باشد. در جدول ۱.۶ میانگین نمونه‌های ممکن دوتایی و احتمالات مربوطه آورده شده است. با توجه به جدول ۱.۶ تابع احتمال و هیستوگرام زیر را برای توزیع احتمال میانگین نمونه $\overline{X}$ داریم.

$\bar{x}$	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴
$P(\overline{X}=\bar{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$



توجه کنید که جدول به دست آمده تمام ویژگی‌های یک توزیع احتمال را دارد. تنها اختلاف این توزیع احتمال با توزیعهای احتمال که تاکنون مورد بررسی قرار داده‌ایم در این است که نتایج به دست آمده در اثر انتخاب یک نمونه تصادفی بوده است و به همین دلیل این توزیع احتمال را توزیع نمونه‌ای گویند. در هیستوگرام فوق مشاهده می‌شود که اگر چه توزیع جمعیت مورد نظر یک توزیع یکنواخت است ولی توزیع نمونه میانگین نمونه $\overline{X}$ تغییر شکل داده و به توزیع نرمال گرایش پیدا کرده است.

در بخش‌های بعد توزیع نمونه‌ای چند آماره مهم را که در فصل بعد کاربرد دارند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۶ توزیع نمونه‌ای میانگین نمونه $\overline{X}$

فرض کنید که از جمعیت X با میانگین μ و واریانس σ^2 نمونه‌ای تصادفی X_1، X_2،...، و X_n به اندازه n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم توزیع نمونه‌ای میانگین نمونه $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ را به دست آوریم. برای این منظور دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف- اگر جمعیت دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد چون $\overline{X}$ به صورت یک ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی نرمال مستقل می‌باشد، بنابراین طبق قضیه ۱۴.۵ داریم که

$$\overline{X} \sim N(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu, \frac{1}{n^{۲}}\sum_{i=1}^{n}\sigma^{۲})$$

و یا

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^{۲}}{n})$$

یعنی میانگین نمونه $\overline{X}$ نیز دارای توزیع نرمال با همان میانگین جمعیت μ است و واریانس آن از واریانس هر یک از مشاهدات کمتر است و با افزایش اندازه نمونه مقدار آن کاهش می‌یابد. بنابراین

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(۰,۱) \qquad (۱۶)$$

ب- اگر جمعیت دارای توزیع نرمال نباشد توزیع $\overline{X}$ به توزیع جمعیت مورد نمونه گیری بستگی دارد و با افزایش حجم نمونه n، توزیع نمونه‌گیری $\overline{X}$ تغییر شکل داده و به توزیع نرمال نزدیک می‌شود. این موضوع چنان اهمیت دارد که آن را به صورت قضیه‌ای به نام قضیه حد مرکزی در زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۶ (قضیه حد مرکزی) فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع با میانگین μ و واریانس $\sigma^{۲}$ متناهی باشند به قسمی که هر تعداد متناهی از این متغیرهای تصادفی از یکدیگر مستقل باشند. در این صورت توزیع حدی $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ موقعی که $n\to\infty$ توزیع نرمال استاندارد است.

به عبارت دیگر قضیه حد مرکزی بیانگر این است که وقتی اندازه نمونه n افزایش یابد توزیع میانگین نمونه $\overline{X}$ یک نمونه تصادفی که از هر جمعیتی گرفته شده باشد، توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^{۲}}{n}$ است.

تقریب نرمال برای توزیع نمونه‌ای $\overline{X}$ معمولاً موقعی که $n\geq ۳۰$ باشد یک تقریب مناسب است و در صورتی که نمونه تصادفی از جمعیت نرمال انتخاب شده باشد آنگاه طبق قسمت (الف) برای هر مقدار n، $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال است.

مثال ۱.۲.۶ یک شرکت تولیدی لاستیک اتومبیل، لاستیک‌هایی تولید می‌کند که طول عمر این لاستیک‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۴ ماه و انحراف معیار ۲ ماه است. احتمال اینکه در یک نمونه تصادفی ۲۵تایی از لاستیک‌ها میانگین طول عمر کمتر از ۲۵ ماه باشد را بیابید.

حل چون جمعیت نرمال است پس $\overline{X} \sim N(۲۴, \frac{۲^{۲}}{۲۵})$ و در نتیجه

$$P(\overline{X} < ۲۵) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{۲۵-۲۴}{\frac{۲}{۵}}) = P(Z < ۲/۵) = ۰/۹۹۳۸$$

مثال ۲.۲.۶ فرض کنید مقدار سالهای تحصیل در بین افراد بالغ در کشوری معین دارای میانگین ۱۱/۱ سال و انحراف معیار ۳ سال باشد. احتمال اینکه در یک نمونه تصادفی ۱۰۰ نفری از افراد بالغ متوسط تعداد سالهای تحصیل بین ۱۱ تا ۱۲ سال باشد را بیابید.

حل چون جمعیت نرمال نیست ولی $n>۳۰$ بنابراین تقریباً $\overline{X} \sim N(۱۱/۱, \frac{۳^{۲}}{۱۰۰})$ و در نتیجه

$$P(۱۱ < \overline{X} < ۱۲) = P(\frac{۱۱-۱۱/۱}{\frac{۳}{۱۰}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{۱۲-۱۱/۱}{\frac{۳}{۱۰}})$$

$$\approx P(-۰/۳۳ < Z < ۳) = P(Z < ۳) - P(Z \leq -۰/۳۳)$$

$$= ۰/۹۹۸۷ - ۰/۳۷۰۷ = ۰/۶۲۸$$

۳.۶ توزیع نمونه‌ای واریانس نمونه $S^{۲}$

یک معیار پراکندگی معقول واریانس نمونه $S^{۲}=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^{۲}$ می‌باشد که توزیع نمونه‌ای آن به توزیعی به نام توزیع مربع-کای[1] مربوط می‌شود که در زیر این توزیع را معرفی می‌کنیم.

توزیع مربع-کای

اگر $Z\sim N(۰,۱)$ آنگاه توزیع $Y=Z^{۲}$ را یک توزیع مربع-کای با یک درجه آزادی گویند. همچنین اگر $Z_۱, Z_۲, \ldots$ و Z_n یک نمونه تصادفی nتایی از جمعیت نرمال استاندارد باشند (یعنی Z_iها از یکدیگر مستقل باشند و $Z_i\sim N(۰,۱)$) آنگاه توزیع $Y=Z_۱^{۲}+Z_۲^{۲}+\ldots+Z_n^{۲}$ را یک توزیع مربع-کای با n درجه آزادی گویند و آن را با نماد $Y\sim\chi^{۲}_{(n)}$ نمایش می‌دهند.

تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی مربع-کای با n درجه آزادی عبارت است از

$$f_Y(y)=\frac{۱}{۲^{\frac{n}{۲}}\Gamma(\frac{n}{۲})}y^{\frac{n}{۲}-۱}e^{-\frac{y}{۲}} \qquad ,y>۰ \qquad (۲۶)$$

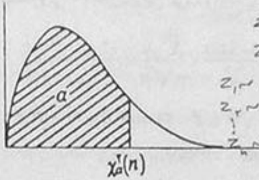
1- Chi-Square distribution

که در آن $\Gamma(.)$ تابع گاما می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(\beta)=\int_{۰}^{\infty} x^{\beta-۱}e^{-x}dx \qquad \beta>۰$$

و همواره $\Gamma(\beta)=(\beta-۱)\Gamma(\beta-۱)$ و $\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}$ و اگر β عدد صحیحی باشد آنگاه $\Gamma(\beta)=(\beta-۱)!$.

نمودار تابع چگالی احتمال توزیع مربع-کای در شکل ۱.۶ رسم شده است.



شکل ۱.۶ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع $\chi^2_{(n)}$

توزیع مربع-کای یکی از توزیعهای مهم در توزیعهای نمونه‌ای است و کاربرد اصلی آن در مبحث استنباط آماری می‌باشد. برای توزیع مربع-کای جدول (IV) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول مقادیر $\chi^2_\alpha(n)$ به ازای مقادیر مختلف α و n محاسبه شده است که در آن $\chi^2_\alpha(n)$ نقطه‌ای روی محور افقی تابع چگالی احتمال توزیع $\chi^2_{(n)}$ است که مساحت زیر منحنی قبل از این نقطه برابر α است. یعنی

$$Y\sim\chi^2_{(n)} \Rightarrow P(Y\le\chi^2_\alpha(n))=\alpha$$

برای مثال از جدول (IV) داریم که $\chi^2_{/۹۵}(۱۵)=۲۵/۰$ و $\chi^2_{/۸۰}(۲۵)=۳۰/۷$.

مثال ۱.۳.۶ اگر $X\sim\chi^2_{(۱۸)}$ مطلوب است

الف- $P(X\le ۷/۰۱)$ را محاسبه کنید.

ب- اگر $P(X>x)=۰/۰۵$ مقدار x را به دست آورید.

حل الف- چون $\chi^2_{/۰۱}(۱۸)=۷/۰۱$ بنابراین $P(X\le ۷/۰۱)=۰/۰۱$

ب-
$$P(X>x)=۰/۰۵ \Rightarrow P(X\le x)=۰/۹۵ \Rightarrow x=\chi^2_{/۹۵}(۱۸)=۲۸/۹$$

در قضیه زیر توزیع نمونه‌ای S^2 را به دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۶ اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه

الف-
$$\frac{(n-۱)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-۱)}$$

ب- $\bar{X}$ و S^2 از یکدیگر مستقل هستند.

مثال ۲.۳.۶ یک جمعیت نرمال دارای واریانس ۶ است. اگر نمونه تصادفی ۲۵ تایی از این جمعیت انتخاب شود احتمال اینکه واریانس نمونه بین ۳/۴۵ و ۱۰/۷۵ باشد را بیابید.

حل
$$P(۳/۴۵<S^2<۱۰/۷۵)=P(\frac{۲۴\times ۳/۴۵}{۶}<\frac{(n-۱)S^2}{\sigma^2}<\frac{۲۴\times ۱۰/۷۵}{۶})$$
$$=P(۱۳/۸<\chi^2_{(۲۴)}<۴۳)$$
$$=P(\chi^2_{(۲۴)}<۴۳)-P(\chi^2_{(۲۴)}\le ۱۳/۸)=۰/۹۹-۰/۰۵=۰/۹۴$$

۴.۶ توزیع نمونه‌ای $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

در بخش ۲.۶ مشاهده کردیم که اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. در بعضی موارد مقدار σ^2 نامعلوم است و به جای آن می‌توان از واریانس نمونه S^2 به عنوان یک برآورد یا تخمین استفاده کرد. حال اگر در Z به جای σ مقدار S را قرار دهیم، توزیع نمونه‌ای $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ به چه صورت خواهد بود. در این بخش نشان می‌دهیم که توزیع نمونه‌ای T به توزیعی به نام توزیع t مربوط می‌شود که آن را در زیر معرفی می‌کنیم.

توزیع t[1]

فرض کنید $Z\sim N(۰,۱)$ و $Y\sim\chi^2_{(n)}$ و X و Y از یکدیگر مستقل باشند. در این صورت توزیع متغیر تصادفی $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ را یک توزیع t با n درجه آزادی گویند و آن را با نماد

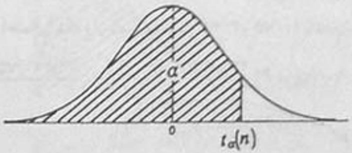
1- t-distribution

$T\sim t_{(n)}$ نمایش می دهند.

تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی t با n درجه آزادی عبارت است از

$$f_T(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty<t<+\infty \qquad (۳.۶)$$

نمودار تابع چگالی احتمال توزیع t در شکل ۲.۶ رسم شده است.



شکل ۲.۶ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع $t_{(n)}$

برای توزیع t جدول (V) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول مقادیر $t_\alpha(n)$ به ازای مقادیر مختلف α و n محاسبه شده است که در آن $t_\alpha(n)$ نقطه‌ای روی محور افقی تابع چگالی احتمال توزیع $t_{(n)}$ است که مساحت زیر منحنی قبل از این نقطه برابر α است. یعنی

$$T\sim t_{(n)} \Rightarrow P(T<t_\alpha(n))=\alpha$$

برای مثال از جدول (V) داریم که $t_{0/70}(10)=0/542$ و $t_{0/95}(15)=1/75$

مثال ۱.۴.۶ اگر $T\sim t_{(16)}$ مطلوب است

الف- $P(T>1/34)$ را محاسبه کنید.

ب- اگر $P(T<t)=0/80$ باشد مقدار t را محاسبه کنید.

حل الف-

$$P(T>1/34)=1-P(T<1/34)=1-0/90=0/10$$

ب-

$$P(T<t)=0/80 \Rightarrow t=t_{0/80}(16)=0/865$$

در قضیه زیر توزیع نمونه‌ای $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۶ اگر $\bar{X}$ و S^2 به ترتیب میانگین و واریانس یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک

جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{(n-1)} \qquad (۴.۶)$$

اثبات با توجه به فرمول (۱.۶) و قضیه ۲.۶ داریم که

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \quad , \quad Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$$

و Z و Y از یکدیگر مستقل هستند. پس $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}\sim t_{(n-1)}$. از طرفی

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

و بنابراین

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{(n-1)}$$

توجه کنید که اگر $n\to\infty$ آنگاه می‌توان نشان داد که توزیع حدی $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ یک توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین برای $n\geq 30$ توزیع T تقریباً نرمال استاندارد است و به همین علت در جدول (V) مقادیر درجه آزادی بزرگتر از ۳۰ با ∞ نشان داده شده است و مقادیر این ردیف از جدول، با جدول توزیع نرمال یکی است.

مثال ۲.۴.۶ نمرات یک کلاس از دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۵ است. اگر از این کلاس یک نمونه ۲۰تایی انتخاب کنیم و مشاهده کنیم که انحراف استاندارد نمرات آنها ۴/۲۸ است، احتمال اینکه میانگین نمرات این افراد از ۱۷ بیشتر باشد را بیابید.

حل در اینجا $\mu=15$، $S=4/28$ و $n=20$ است بنابراین

$$P(\bar{X}>17)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>\frac{17-15}{\frac{4/28}{\sqrt{20}}}\right)=P(t_{(19)}>2/09)$$

$$= 1 - P(t_{(19)} \le 2/09) = 1 - 0/975 = 0/025$$

۵.۶ توزیع نمونه‌ای اختلاف میانگین‌ها $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

فرض کنید که دو جمعیت داشته باشیم که جمعیت اول دارای میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و جمعیت دوم دارای میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد. یک نمونه تصادفی n_1 تایی از جمعیت اول انتخاب کرده و میانگین نمونه آن را با $\bar{X}_1$ و واریانس نمونه آن را با S_1^2 نمایش می‌دهیم و یک نمونه تصادفی n_2 تایی از جمعیت دوم انتخاب کرده و میانگین نمونه آن را با $\bar{X}_2$ و واریانس نمونه آن را با S_2^2 نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنید که نمونه‌گیری از دو جمعیت مستقل از یکدیگر باشند. در این بخش می‌خواهیم توزیع نمونه‌ای اختلاف میانگین‌ها یعنی $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ را به دست آوریم. برای این منظور ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: واریانس دو جمعیت σ_1^2 و σ_2^2 معلوم باشند

در این حالت بستگی به نرمال بودن جمعیتها دو حالت زیر پیش می‌آید

الف- اگر دو جمعیت نرمال باشند آنگاه طبق قضیه ۱۴.۵ داریم که

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \quad , \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

و $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، که یک ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی نرمال است، نیز دارای توزیع نرمال است یعنی

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

و یا

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \qquad (5.6)$$

ب- اگر دو جمعیت نرمال نباشند آنگاه طبق قضیه حد مرکزی برای اندازه نمونه $n_1 \ge 30$ و $n_2 \ge 30$ هر کدام از $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ دارای توزیع تقریبی نرمال بوده و چون از یکدیگر مستقل هستند بنابراین $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ نیز تقریباً دارای توزیع نرمال است و نتیجه قسمت (الف) نیز در این حالت

برقرار می‌باشد.

مثال ۱.۵.۶ دو کارخانه تولید کابل A و B وجود دارند. کابل‌هایی که توسط کارخانه A تولید می‌شود، به طور متوسط تحمل ۴۰۰۰ پوند نیروی کششی و انحراف معیار ۳۰۰ پوند را دارند و کابل‌هایی که توسط کارخانه B تولید می‌شود، به طور متوسط تحمل ۴۵۰۰ پوند نیرو با انحراف معیار ۲۰۰ پوند را دارند. اگر ۱۰۰ کابل نوع A و ۵۰ کابل نوع B مورد آزمایش قرار گیرند، احتمال اینکه متوسط تحمل نیروی کششی B حداقل ۶۰۰ پوند بیش از نیروی کششی A باشد را بیابید.

حل در اینجا چون $n_A = 100$ و $n_B = 50$ پس تقریباً

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N(4000 - 4500, \frac{300^2}{100} + \frac{200^2}{50})$$

و یا تقریباً $\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N(-500, 1700)$ بنابراین

$$P(\bar{X}_B \ge \bar{X}_A + 600) = P(\bar{X}_A - \bar{X}_B \le -600)$$

$$= P(\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \le \frac{-600 + 500}{\sqrt{1700}})$$

$$\approx P(Z \le -2/43) = 0/0075$$

حالت دوم: واریانس دو جمعیت نامعلوم اما مساوی باشند

در این حالت $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ می‌باشد و σ^2 که واریانس مشترک دو جمعیت می‌باشد نامعلوم است. در جمعیت اول می‌توان از S_1^2 و در جمعیت دوم می‌توان از S_2^2 به عنوان یک برآورد یا تخمین برای σ^2 استفاده کرد. اما بهتر است که از یک میانگین وزنی این دو کمیت برای برآورد σ^2 استفاده کنیم. بنابراین از واریانس مشترک دو نمونه یعنی

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \qquad (6.6)$$

به عنوان یک برآورد یا تخمین σ^2 استفاده می‌کنیم. حال اگر دو جمعیت نرمال باشند آنگاه با استفاده از قضیه ۲.۶ داریم که

$$\frac{(n_1+n_2-2)S_P^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

و بنابراین با استفاده از تعریف توزیع t به راحتی می‌توان نشان داد که

$$T=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{(n_1+n_2-2)} \qquad (۷.۶)$$

۶.۶ توزیع نمونه‌ای نسبت واریانسهای نمونه

دو جمعیت مفروض در بخش ۵.۶ را در نظر بگیرید. در این بخش می‌خواهیم توزیع نمونه‌ای نسبت واریانسهای نمونه یعنی $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ را به دست آوریم. توزیع نمونه‌ای این نسبت به توزیعی بنام توزیع F مربوط می‌شود که آن را در زیر معرفی می‌کنیم.

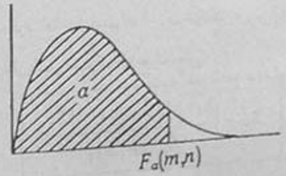
توزیع F[1]

اگر $U\sim\chi^2_{(m)}$ و $V\sim\chi^2_{(n)}$ و متغیرهای تصادفی U و V از یکدیگر مستقل باشند آنگاه توزیع متغیر تصادفی $F=\frac{U/m}{V/n}$ را یک توزیع F با m و n درجه آزادی گویند و آن را با نماد $F\sim F_{(m,n)}$ نمایش می‌دهند.

تابع چگالی احتمال یک توزیع F با درجات آزادی m و n عبارت است از

$$f_F(x)=\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+\frac{m}{n}x)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad x>0 \qquad (۸.۶)$$

نمودار تابع چگالی احتمال توزیع F در شکل ۳.۶ رسم شده است.



شکل ۳.۶ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع $F_{(m,n)}$

1- F-distribution

برای توزیع F جدول (VI) در ضمیمه ارایه گردیده است که در این جدول $F_\alpha(m,n)$ به ازای مقادیر مختلف m و n و $\alpha=0/90, 0/95, 0/99$ محاسبه شده است. که در آن $F_\alpha(m,n)$ نقطه‌ای روی محور افقی تابع چگالی احتمال توزیع $F_{(m,n)}$ است که مساحت زیر منحنی قبل از این نقطه برابر α است (برای مثال از جدول (VI) داریم که $F_{0/90}(6,14)=2/24$ و $F_{0/95}(20,10)=2/77$)

مثال ۱.۶.۶ اگر $F\sim F_{(10,12)}$ مطلوب است

الف- $P(F<2/75)$ را محاسبه کنید.

ب- اگر $P(F>x)=0/01$ باشد مقدار x را محاسبه کنید.

حل الف- چون $F_{0/95}(10,12)=2/75$ پس $P(F<2/75)=0/95$

ب- $P(F>x)=0/01 \Rightarrow P(F\le x)=0/99 \Rightarrow x=F_{0/99}(10,12)=4/30$

در قضیه زیر توزیع نمونه‌ای $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ را به دست می‌آوریم.

قضیه ۴.۶ اگر S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانسهای نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از جمعیتهای نرمال با واریانسهای σ_1^2 و σ_2^2 باشند آنگاه

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{(n_1-1,n_2-1)} \qquad (۹.۶)$$

اثبات از قضیه ۲.۶ نتیجه می‌شود که

$$U=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2_{(n_1-1)} \quad , \quad V=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2_{(n_2-1)}$$

و U و V از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین از تعریف توزیع F داریم که

$$F=\frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)}\sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$$

از طرفی

$$F=\frac{(n_1-1)S_1^2/[\sigma_1^2(n_1-1)]}{(n_2-1)S_2^2/[\sigma_2^2(n_2-1)]}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

بنابراین نتیجه قضیه حاصل می‌شود.

مثال ۲.۶.۶ اگر S_1^2 و S_2^2 نمایانگر واریانسهای نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های ۲۵ و

۳۱ تایی به ترتیب از جمعیت‌های نرمال با واریانسهای ۱۰ و ۱۵ باشند، احتمال اینکه S_1^2 حداقل ۱/۲۶ برابر S_2^2 باشد چقدر است؟

حل

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 1/26\right) = P\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \geq 1/26\left(\frac{15}{10}\right)\right) = P(F_{(22,30)} \geq 1/89)$$

$$= 1 - P(F_{(22,30)} < 1/89) = 1 - 0/95 = 0/05$$

۷.۶ تمرینات

۱ جعبه‌ای حاوی ۵ مهره است که از ۱ تا ۵ شماره گذاری شده‌اند. از این جعبه نمونه‌ای مرکب از ۲ مهره به تصادف و با جایگذاری استخراج می‌شود.

الف- با تشکیل جدول توزیع احتمال توأم X_1 و X_2، توزیع $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ را محاسبه کنید.

ب- میانگین و واریانس $\overline{X}$ را از روی توزیع آن محاسبه کنید.

ج- میانگین و واریانس جمعیت را پیدا کنید.

د- نمودار توزیع جمعیت (برای یک مشاهده X) و نمودار توزیع نمونه‌ای $\overline{X}$ را رسم کنید.

۲ جعبه‌ای پر از مهره‌های هم شکل است که یک سوم آنها با شماره ۲ و یک سوم با شماره ۴ و یک سوم با شماره ۶ مشخص شده‌اند.

الف- یک مهره استخراج می‌گردد اگر شماره آن X باشد، میانگین μ و انحراف معیار σ جمعیت را بیابید.

ب- نمونه‌ای مرکب از دو مهره با جایگذاری استخراج می‌شود. اگر $\overline{X}$ میانگین نمونه باشد، جدول توزیع احتمال $\overline{X}$ را به دست آورید و از روی آن میانگین و واریانس $\overline{X}$ را حساب کنید.

ج- قسمت (ب) را برای نمونه‌ای متشکل از ۳ مهره حل کنید.

۳ اندازه‌گیری قطر گام نوعی پیچ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰/۴۰۰۸ اینچ و انحراف معیار ۰/۰۰۰۳ اینچ است. حدود مشخصات طراحی به صورت ۰/۰۰۱±۰/۴ اینچ ارایه شده است. نمونه

های ۴ تایی از قطرهای گام گرفته می‌شود. احتمال اینکه میانگین نمونه در داخل حدود مشخصات قرار گیرد را بیابید. احتمال تجاوز میانگین از ۰/۴۰۰۵ را بیابید.

۴ عرض یک شکاف که بر یک قطعه از آلیاژ آلومینیوم که با ریخته‌گری تولید می‌شود، توزیع نرمال با میانگین ۰/۹ اینچ و انحراف معیار ۰/۰۲ اینچ دارد. حدود مشخصات طراحی عبارت از ۰/۰۰۵±۰/۹ اینچ است. هر ساعت نمونه‌هایی ۵تایی از آلیاژ ریخته‌گری گرفته شده و میانگین آن محاسبه می‌شود. چند درصد از این میانگین‌های نمونه در خارج از حدود مشخصات طراحی قرار می‌گیرند؟ حدود را طوری تعیین کنید که درصد میانگین‌های نمونه که خارج از حدود قرار می‌گیرند معادل ۰/۲۷ درصد باشد.

۵ مقدار پولی که مردم شهر معینی در کیف خود دارند بطور متوسط ۹۰۰۰ تومان با انحراف معیار ۲۵۰۰ تومان است. احتمال آنکه گروهی مرکب از ۲۲۵ نفر به طور متوسط بیش از ۹۱۰۰ تومان همراه داشته باشند را بیابید.

۶ فرض کنید طول دانه‌های زنجیر دوچرخه‌ای به طور متوسط ۰/۵۰ اینچ با انحراف معیار ۰/۰۴ اینچ باشد. استانداردهای سازنده دوچرخه اقتضا می‌کند که زنجیر بین ۴۹ و ۵۰ اینچ طول داشته باشد. اگر زنجیرها از ۱۰۰ دانه درست شده باشند، چه نسبتی از آنها مطابق استاندارد می‌باشند؟

۷ اگر اندازه نمونه‌ای ۳۶ و خطای استاندارد آن ۲ باشد، اندازه نمونه چقدر باید باشد تا اینکه خطای استاندارد آن کاهش پیدا نموده و به ۱/۲ برسد؟

۸ در فاصله (۰,۱) تعداد ۷۵ عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم. نشان دهید احتمال اینکه معدل این عددها در فاصله (۰/۵۵,۰/۴۵) قرار گیرد تقریباً برابر ۰/۸۶۶ است.

۹ تعداد مکالمات تلفنی که از طریق مرکزی انجام می‌شود به طور متوسط ۴ مکالمه در دقیقه است. احتمال تقریبی اینکه طی یک ساعت آینده حداقل ۲۵۰ مکالمه از طریق این مرکز انجام شود را بیابید.

۱۰ وزن یک گلوله فلزی دارای میانگین ۵/۰۲ اونس و انحراف معیار ۰/۳۰ اونس است. احتمال اینکه مجموع وزن یک نمونه تصادفی ۱۰۰تایی انتخاب شده از این نوع گلوله‌های فلزی (الف) بین ۴۹۶ تا ۵۰۰ اونس (ب) بیش از ۵۱۰ اونس باشد را بیابید.

۱۱ پژوهشگری می‌خواهد میانگین جمعیتی را با استفاده از نمونه‌ای برآورد کند. وی مایل است

۲۶ فرض کنید در دو جمعیت میانگین مصرف روزانه پروتئین به ترتیب ۱۲۵ و ۱۰۰ گرم باشد. اگر مقادیر مصرف روزانه پروتئین در دو جمعیت دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۱۵ گرم باشد، احتمال اینکه نمونه‌های تصادفی و مستقل ۲۵ نفری از هر جمعیت، دارای تفاوت بین میانگین‌های نمونه کمتر از ۱۲ گرم باشد را بیابید.

۲۷ میانگین نمره هوش دانشجویان سال اول، در یک کالج بخصوص ۵۴۰ با انحراف معیار ۵۰ است. احتمال اینکه دو گروه از دانشجویان انتخابی به طور تصادفی به ترتیب شامل ۳۲ و ۵۰ دانشجو در حد متوسط نمره‌هایشان (الف) بیش از ۲۰ نمره، (ب) مقداری بین ۵ و ۱۰ نمره، فرق داشته باشند را بیابید.

۲۸ میانگین و انحراف معیار نمرات درس آمار دانشجویان یک دانشگاه به ترتیب ۷۲ و ۸ می‌باشد. دو نمونه تصادفی مستقل ۳۶ و ۴۰ تایی انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه تفاضل میانگین نمرات این دو نمونه بین ۲ و ۵ باشد را بیابید.

۲۹ یک نوع گلوله فلزی ساخت کارخانه‌ای به طور متوسط دارای وزن ۰/۵۰ اونس با انحراف معیار ۰/۰۲ اونس است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه دو بسته ۱۰۰۰تایی از این نوع گلوله‌ها بیش از ۲ اونس با یکدیگر تفاوت وزنی داشته باشند.

۳۰ مقادیر زیر را محاسبه کنید

$$F_{۰/۹۵}(۷,۱۵)\ ,F_{۰/۹۵}(۱۵,۷),F_{۰/۹۹}(۲۴,۱۹)\ ,\ F_{۰/۹۹}(۱۹,۲۴)\ ,\ F_{۰/۹۰}(۲۸,۱۲)$$

۳۱ از دو جمعیت نرمال با واریانسهای ۲۰ و ۳۰ به ترتیب نمونه‌های تصادفی ۸ و ۱۰ تایی انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه واریانس نمونه اول بیش از ۲ برابر واریانس نمونه دوم باشد را بیابید.

۳۲ اگر نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازه‌های $n_۱=n_۲=۸$ از جمعیتهای نرمال با واریانسهای یکسان به دست آمده باشند، احتمال اینکه یکی از این دو واریانس نمونه حداقل ۷ برابر بزرگتر از دیگری باشد را بیابید.

۳۳ اگر $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ به ترتیب واریانسهای دو نمونه تصادفی مستقل از دو جمعیت نرمال باشند و بدانیم که واریانس جمعیت دوم سه برابر واریانس جمعیت اول است و نمونه‌هایی به اندازه $n_۱=۸$ و $n_۲=۱۲$ انتخاب شده باشند، مطلوب است محاسبه
$P(S_۱<\sqrt{۱/۶۳}S_۲)$

فصل هفتم

نظریه برآوردیابی

۱.۷ استنباط آماری

همانگونه که در فصل ششم اشاره شد هدف از یک بررسی آماری، جمع آوری و تنظیم اطلاعات از قسمتی از جمعیت و تجزیه و تحلیل و نتیجه‌گیری از روی آنها در مورد کل جمعیت می‌باشد. این تجزیه و تحلیل و نتیجه‌گیری را استنباط آماری می‌گویند.

تعریف ۱.۷ استنباط آماری روشی است که بوسیله آن براساس نتایج حاصله از نمونه انتخابی از جمعیت در مورد کل جمعیت یا پارامترهای ناشناخته جمعیت نتیجه گیریهایی انجام می‌گیرد.

استنباط آماری دارای دو شاخه مهم زیر است

۱ـ برآورد پارامترهای مجهول جمعیت،

۲ـ آزمون فرضهای آماری در مورد پارامترهای مجهول جمعیت.

برآورد پارامتر مجهول جمعیت خود نیز به دو روش انجام می‌گیرد الف- برآورد نقطه‌ای، ب- برآورد فاصله‌ای. برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱.۷ الف- یک بازرس می‌خواهد متوسط میزان پروتئین موجود در یک غذای کنسرو شده را تعیین کند. برای این منظور او یک نمونه n تایی از این غذای کنسرو شده را جمع آوری می‌کند و با اندازه‌گیری میزان پروتئین موجود در آنها و محاسبه متوسط این مقادیر می‌خواهد متوسط میزان پروتئین در کل کنسروها را تعیین کند. این عمل را برآوردیابی گویند.

ب- دو شرکت A و B یک نوع غذای کنسرو شده را تولید می‌کنند. شرکت A مدعی است که میزان پروتئین موجود در کنسروهای این شرکت از شرکت B بیشتر است. این ادعای شرکت A را یک فرض آماری گویند. با جمع آوری دو نمونه از این دو شرکت و مقایسه آنها ادعای شرکت A را رد یا قبول می‌کنیم که این عمل را آزمون فرض آماری گویند.

در این فصل به مبحث برآورد پارامترهای مجهول جمعیت خواهیم پرداخت و در فصل بعد مبحث آزمون فرضهای آماری را در نظر می‌گیریم.

۲.۷ برآورد پارامتر مجهول جمعیت

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ و X_n یک نمونه تصادفی n تایی با مقادیر مشاهده شده $x_1, x_2, \ldots$ و x_n از جمعیت X با توزیع احتمال $f_\theta(x)$ باشند که این توزیع احتمال به پارامتر مجهول θ بستگی دارد. هدف از برآوردیابی یافتن کمیتی از روی مقادیر مشاهده شده $x_1, x_2, \ldots$ و x_n بعنوان تقریبی از پارامتر مجهول θ می‌باشد. این عمل به دو روش انجام می‌گیرد.

الف- برآورد نقطه‌ای در این روش از روی مقدار مشاهده شده $x_1, x_2, \ldots$ و x_n یک نمونه تصادفی، تنها مقدار مشاهده شده یک آماره را بعنوان تقریبی از پارامتر مجهول جمعیت ارایه می‌دهیم. اگر بر اساس نمونه تصادفی $X_1, X_2, \ldots$ و X_n آماره مورد نظر ما برای تخمین پارامتر مجهول $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ باشد آنگاه متغیر تصادفی $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ را یک برآوردگر[1] پارامتر θ و عدد $t=T(x_1,\ldots,x_n)$ را یک برآورد[2] پارامتر θ گویند. برای مثال برای به دست آوردن متوسط قد افراد یک اداره اگر یک نمونه تصادفی چهار تایی X_1, X_2, X_3 و X_4 با مقادیر مشاهده شده $x_1=172$، $x_2=168$، $x_3=165$ و $x_4=175$ را جمع آوری کنیم آنگاه آماره $\overline{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i$ یک برآوردگر میانگین قد افراد اداره یعنی μ است و مقدار مشاهده شده آن یعنی $\bar{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=170$ یک برآورد نقطه‌ای μ است.

چون یک برآوردگر تابعی از نمونه تصادفی است بنابراین برای یک پارامتر مجهول می‌توان برآوردگرهای زیادی را معرفی کرد. حال این سوال مطرح می‌شود که در بین

1- Estimator
2- Estimate

برآوردگرهای یک پارامتر کدامیک بهترین است. در پاسخ به این سوال به تعاریف زیر توجه کنید.

تعریف ۲.۷ برآوردگر $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ را یک برآوردگر نااریب برای θ گویند هر گاه

$$E(T)=\theta \qquad (1.7)$$

به عبارت دیگر اگر متوسط مقدار برآوردگر T به ازای نمونه‌های مختلف برابر پارامتر θ باشد، آنگاه T را برای θ نااریب گویند.

مثال ۱.۲.۷ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ و X_n یک نمونه تصادفی از جمعیتی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند.

الف- تحت چه شرطی برآوردگر $T=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ که در آن a_iها مقادیر ثابتی هستند، یک براوردگر نااریب برای μ است.

ب- نشان دهید که واریانس نمونه $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ یک برآوردگر نااریب برای واریانس جمعیت σ^2 است.

حل الف- می‌دانیم که $E(X_i)=\mu, i=1,2,\ldots,n$ و بایستی $E(T)=\mu$ باشد. بنابراین طبق قوانین امید ریاضی داریم که

$$\mu=E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu=\mu\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

بنابراین با شرط $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$، برآوردگر T برای μ نااریب است. اگر قرار دهیم $a_i=\frac{1}{n}, i=1,\ldots,n$ آنگاه $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ برای μ نااریب است.

ب- به تمرین ۲ مراجعه کنید.

تعریف ۳.۷ اگر T_1 و T_2 دو برآوردگر نااریب θ باشند و $Var(T_1)<Var(T_2)$ آنگاه برآوردگر T_1 را کاراتر از برآوردگر T_2 گویند. بنابراین در بین برآوردگرهای نااریب θ آن برآوردگری که دارای کمترین واریانس باشد را کاراترین برآوردگر گویند.

مثال ۲.۲.۷ در مثال ۱.۲.۷ (الف) نشان دهید که در بین تمام برآوردگرهای $T=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ با شرط $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$، برآوردگر $\overline{X}$ دارای کمترین واریانس است.

حل طبق خواص واریانس برای متغیرهای تصادفی مستقل داریم که

$$Var(T)=Var(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(a_i-\frac{1}{n}+\frac{1}{n})^2=\sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-\frac{1}{n})^2+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\right]$$

$$=\sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\right]$$

مقدار درون کروشه موقعی کمترین مقدار خود را به دست می‌آورد که $\sum_{i=1}^{n}(a_i-\frac{1}{n})^2=0$ و یا $a_i=\frac{1}{n}, i=1,\dots,n$، یعنی $\overline{X}$ در بین برآوردگرهای فوق دارای کمترین واریانس است.

ب- برآورد فاصله‌ای در برآورد نقطه‌ای موقعی برآوردگر $T=T(X_1,\dots,X_n)$ برای پارامتر θ یک برآوردگر خوب است که مقدار مشاهده شده آن یعنی برآورد $t=T(x_1,\dots,x_n)$ به پارامتر θ نزدیک باشد. اما چون با تغییر نمونه مقدار برآورد تغییر می‌یابد پس برآورد نقطه‌ای دارای خطای زیاد می‌باشد. بنابراین به جای برآورد نقطه‌ای می‌توان از برآورد فاصله که دارای خطای کمتری است استفاده کرد.

در روش برآورد فاصله‌ای، یک فاصله (L,U) از اعداد حقیقی را به عنوان تقریبی از پارامتر مجهول θ ارایه می‌دهیم که این فاصله با یک احتمال زیاد پارامتر θ را در برداشته باشد. این فاصله را فاصله اطمینان گویند و اگر احتمال قرار گرفتن پارامتر θ در این فاصله $1-\alpha$ باشد، آن را یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ گویند. L را حد پائین فاصله و U را حد بالای فاصله و $1-\alpha$ را ضریب اطمینان فاصله گویند. چگونگی به دست آوردن فاصله اطمینان در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۳.۲.۷ فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n یک نمونه تصادفی از جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند. که در آن σ^2 مقداری معلوم (مثلاً $\sigma^2=4$) ولی μ پارامتر مجهول است. یک برآورد نقطه‌ای و یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ پیدا کنید.

حل پارامتر μ میانگین کل جمعیت است بنابراین طبق مثالهای ۱.۲.۷ و ۲.۲.۷ معقول به نظر می‌رسد که آن را با میانگین نمونه $\bar{x}$ برآورد کنیم بنابراین برآوردگر نقطه‌ای μ عبارت است از

$$\hat{\mu}=\overline{X}$$

برای به دست آوردن یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ بایستی فاصله (L,U) را به گونه‌ای تعیین کنیم که

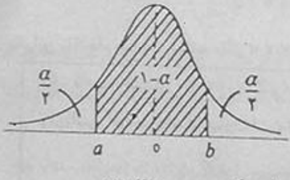
$$P(L<\mu<U)=1-\alpha \qquad (۲.۷)$$

برای این منظور ابتدا تابعی را تعیین می‌کنیم که بستگی به نمونه تصادفی و پارامترهای معلوم و مجهول جمعیت داشته باشد به طوری که توزیع این تابع به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد. این تابع را **تابع محور** می‌نامند. با استفاده از مطالب بخش ۲.۶ تابع محور مناسب برای این مثال عبارت است از

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

حال برای به دست آوردن فاصله اطمینان برای μ اعداد $a<b$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$P(a<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b)=1-\alpha$$



شکل ۱.۷

با توجه به شکل ۱.۷ نقطه b نقطه‌ای روی محور افقی نمودار تابع چگالی نرمال استاندارد است که مساحت زیر منحنی قبل از این نقطه $1-\frac{\alpha}{2}$ می‌باشد. این نقطه را با $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ نمایش می‌دهیم که از جدول (III) قابل محاسبه است. نقطه a قرینه نقطه b می‌باشد. با قرار دادن این مقادیر a و b در رابطه فوق داریم که

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$$

با حل نامساوی درون پرانتز نسبت به پارامتر μ داریم که

$$P(\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

با مقایسه این رابطه با رابطه (۲.۷) نتیجه می‌شود که یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای میانگین μ عبارت است از

$$\mu \in \left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

در بخشهای بعد با استفاده از مطالب و مثالهای این بخش پارامترهای مختلف جمعیت را برآورد خواهیم کرد.

۳.۷ برآورد میانگین جمعیت

فرض کنید که از یک جمعیت X با میانگین μ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی به اندازه n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم میانگین جمعیت یعنی μ را برآورد کنیم. طبق مطالب بخش قبل بهترین برآوردگر نقطه‌ای μ عبارت است از $\hat{\mu}=\overline{X}$. برای به دست آوردن یک فاصله اطمینان برای μ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف- واریانس جمعیت معلوم است در این حالت اگر جمعیت نرمال باشد آنگاه یک تابع محور مناسب عبارت است از

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad (۳.۷)$$

و بنابراین با انجام عملیات مشابه مثال ۳.۲.۷ داریم که

> یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$٪ برای میانگین جمعیت نرمال μ موقعی که واریانس σ^2 معلوم است عبارت است از
>
> $$\mu \in \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
>
> که در آن $\bar{x}$ میانگین نمونه تصادفی و $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ مقدار متغیر نرمال استاندارد است که سطح زیر منحنی در سمت چپ آن $1-\frac{\alpha}{2}$ باشد.

توجه کنید که اگر جمعیت نرمال نباشد ولی $n \geq 30$ باشد آنگاه رابطه (۳.۷) هنوز به طور تقریبی برقرار است و در نتیجه فاصله اطمینان فوق یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$٪ برای μ است.

ب- واریانس جمعیت نامعلوم است در این حالت اگر جمعیت نرمال باشد آنگاه طبق مطالب بخش ۴.۶ یک تابع محور مناسب برای ساختن فاصله اطمینان برای μ عبارت است از

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \qquad (۴.۷)$$

حال با استفاده از این تابع محور و انجام عملیات مشابه با مثال ۳.۲.۷ و جایگزینی s به جای σ و $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ به جای $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ داریم که

> یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$٪ برای میانگین جمعیت نرمال μ موقعی که واریانس σ^2 نامعلوم است عبارت است از
>
> $$\mu \in \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$
>
> که در آن $\bar{x}$ و s به ترتیب میانگین و انحراف استاندارد نمونه تصادفی n تایی و $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ مقدار متغیر $t_{(n-1)}$ است که سطح زیرمنحنی در سمت چپ آن $1-\frac{\alpha}{2}$ باشد.

توجه کنید که برای محاسبه s^2 می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد.

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] \qquad (۵.۷)$$

همچنین توجه کنید که اگر $n>30$ باشد آنگاه $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و بنابراین در حالتی که σ نامعلوم و $n>30$ باشد می‌توان از فاصله اطمینان حالت (الف) با قرار دادن s به جای σ استفاده کرد.

مثال ۱.۳.۷ یک تولیدکننده لامپهای روشنایی، لامپهایی را تولید می‌کند که انحراف معیار طول عمر آنها ۴۰ ساعت است. اگر یک نمونه تصادفی ۳۶ تایی دارای حد متوسط عمر ۸۷۰ ساعت باشند، یک برآورد نقطه‌ای و یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای حد متوسط عمر تمام لامپهای تولیدی این کارخانه را به دست آورید.

حل در این مثال $\sigma=40$، $n=36$، $\bar{x}=870$ و $1-\alpha=0/95$ می‌باشد بنابراین برآورد نقطه‌ای عبارت است از $\hat{\mu}=\bar{x}=870$. برای به دست آوردن فاصله اطمینان داریم که

$$1-\alpha=0/95 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0/975$$

و با استفاده از جدول (III) $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{0/975}=1/96$، بنابراین

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(870 - 1.96\frac{40}{\sqrt{36}} , 870 + 1.96\frac{40}{\sqrt{36}}\right) = (856.93 , 883.07)$$

یعنی ۹۵ درصد اطمینان داریم که حد متوسط عمر تمام لامپهای تولیدی این کارخانه در فاصله فوق قرار دارد.

مثال ۲.۳.۷ اگر طول قد کارمندان یک اداره دارای توزیع نرمال باشد، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین طول قد کارمندان این اداره پیدا کنید در حالیکه یک نمونه ۵ تایی از بین کارمندان انتخاب شده باشد و مقادیر ۱۶۰، ۱۷۰، ۱۶۵، ۱۷۵ و ۱۸۰ به دست آمده باشد.

حل در این مثال σ نامعلوم است و $n=5$ ، $\sum_{i=1}^{5} x_i = 850$ ، $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 144750$ و $1-\alpha = 0.95$ می باشد، بنابراین

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{850}{5} = 170$$

$$s^2 = \frac{1}{5-1}\left[\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2\right] = \frac{1}{4}\left[144750 - \frac{(850)^2}{5}\right] = 62.5$$

و با استفاده از جدول (V) داریم که $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.78$ در نتیجه

$$\mu \in \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(170 - 2.78\sqrt{\frac{62.5}{5}} , 170 + 2.78\sqrt{\frac{62.5}{5}}\right) = (160.17 , 179.83)$$

یعنی ۹۵ درصد اطمینان داریم که میانگین طول قد کارمندان این اداره در فاصله فوق قرار دارد.

توجه کنید به کمک بعضی از ماشینهای محاسبه می‌توان به راحتی مقادیر $\bar{x}$ و s را به طور مستقیم محاسبه نمود.

خطای برآورد میانگین چون اغلب مقدار برآورد نقطه‌ای $\bar{x}$ دقیقاً مساوی μ نیست بنابراین برآورد نقطه‌ای دارای خطا است. با استفاده از حدود فاصله اطمینان می‌توان میزان این خطا یعنی $|\bar{x} - \mu|$ را در دو حالت زیر تعیین کرد.

الف – اگر واریانس σ^2 معلوم باشد آنگاه

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow |\bar{x} - \mu| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ب – اگر واریانس σ^2 نامعلوم باشد آنگاه

$$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow |\bar{x} - \mu| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

بنابراین اگر $\bar{x}$ را به عنوان برآورد نقطه‌ای μ به کار ببریم آنگاه $100(1-\alpha)\%$ مطمئن هستیم که

الف – خطای برآورد کمتر از $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است اگر σ معلوم باشد.

ب – خطای برآورد کمتر از $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ است اگر σ معلوم نباشد.

برای مثال در مثال ۱.۳.۷ چون

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{40}{\sqrt{36}} = 13.07$$

بنابراین ۹۵ درصد مطمئن هستیم که خطای برآورد میانگین از ۱۳/۰۷ کمتر است.

تعیین اندازه نمونه در یک بررسی آماری یکی از مهمترین مراحل، تعیین اندازه نمونه n قبل از عمل نمونه گیری می باشد. اگر یک حداکثر مقدار خطای e برای برآورد میانگین μ برای نمونه گیر قابل تحمل باشد آنگاه بوسیله خطای برآورد می توان اندازه نمونه n را در دو حالت زیر تعیین کرد.

الف – اگر واریانس σ^2 معلوم باشد آنگاه

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le e \Rightarrow n \ge (z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/e)^2$$

ب – اگر واریانس σ^2 نامعلوم باشد آنگاه

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \le e \Rightarrow n \ge (t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)s/e)^2$$

(که در این حالت ابتدا به وسیله یک نمونه مقدماتی مقداری برای s به دست می آوریم و سپس اندازه نمونه واقعی n را از فرمول فوق محاسبه می‌کنیم. در هر دو حالت n را برابر کوچکترین عدد صحیح که در نامساویهای فوق صدق کند انتخاب می‌کنیم. بنابراین)

اگر $\bar{x}$ را به عنوان برآورد نقطه‌ای μ به کار ببریم آنگاه $(1-\alpha)100\%$ مطمئن هستیم که خطای برآورد از مقدار مشخص e کمتر است موقعی که اندازه نمونه از رابطه زیر محاسبه گردد

الف - اگر واریانس σ^2 معلوم باشد $n \ge (z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/e)^2$

ب - اگر واریانس σ^2 نامعلوم باشد $n \ge (t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)s/e)^2$

مثال ۳.۳.۷ در مثال ۱.۳.۷ اگر بخواهیم با اطمینان ۹۵ درصد خطای برآورد حد متوسط طول عمر لامپها از ۱۰ ساعت کمتر باشد، اندازه نمونه را تعیین کنید.

حل $n \ge (z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/e)^2 = (\frac{1/96\times 40}{10})^2 = 61/47$

بنابراین اندازه نمونه بایستی n=۶۲ باشد.

مثال ۴.۳.۷ در مثال ۲.۳.۷ اگر بخواهیم با اطمینان ۹۵ درصد خطای برآورد میانگین طول قد کارمندان اداره از ۵ سانتیمتر کمتر باشد، اندازه نمونه را تعیین کنید.

حل اگر داده‌های مثال ۲.۳.۷ را به عنوان یک نمونه مقدماتی در نظر بگیریم آنگاه $s^2=62/5$ و در نتیجه

$n \ge (t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)s/e)^2 = (\frac{2/78}{5})^2 \times 62/5 = 19/321$

بنابراین اندازه نمونه بایستی n=۲۰ باشد.

۴.۷ برآورد واریانس جمعیت

فرض کنید که از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی به اندازه n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم واریانس جمعیت یعنی σ^2 را برآورد کنیم. بهترین برآوردگر نقطه‌ای σ^2 عبارت است از واریانس نمونه $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ یعنی $\hat{\sigma}^2=S^2$

برای به دست آوردن یک فاصله اطمینان برای σ^2 طبق مطالب بخش ۳.۶ تابع محور مناسب عبارت است از

$$Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)} \qquad (6.7)$$

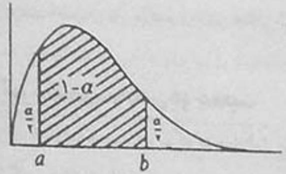
حال با استفاده از این تابع محور، اعداد a و b را چنان تعیین می‌کنیم که

$$P(a<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<b)=1-\alpha$$

با توجه به شکل ۲.۷ مقادیر a و b عبارتند از

$$a=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad , b=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه فوق و انجام عملیات مشابه مثال ۳.۲.۷ داریم که



شکل ۲.۷

یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای واریانس جمعیت نرمال σ^2 عبارت است از

$$\sigma^2\in\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

که در آن s^2 واریانس یک نمونه تصادفی n تایی است.

مثال ۱.۴.۷ طول یک لوله ساختمانی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است. یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی از لوله‌ها جمع آوری شده است و مقادیر $\sum_{i=1}^{25}x_i=252/7$ و $\sum_{i=1}^{25}x_i^2=2579/7$ حاصل شده است. یک برآورد نقطه‌ای و یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای واریانس واقعی لوله‌ها به دست آورید.

حل با توجه به مقادیر داده شده و رابطه (۵.۷) داریم که

$$s^2=\frac{1}{25-1}\left[2579/7-\frac{(252/7)^2}{25}\right]=1/06$$

بنابراین برآورد نقطه‌ای σ^2 عبارت است از $\hat{\sigma}^2=s^2=1/06$

همچنین با استفاده از جدول (IV) داریم که

$$1-\alpha=0/90 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{2}=0/05\\ 1-\frac{\alpha}{2}=0/95\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0/05}(24)=13/8\\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0/95}(24)=36/4\end{cases}$$

بنابراین

$$\sigma^2\in\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\frac{۲۴\times ۱/۰۶}{۳۶/۴},\frac{۲۴\times ۱/۰۶}{۱۳/۸}\right)=(۰/۶۹۹,\ ۱/۸۴۳)$$

یعنی ۹۰ درصد اطمینان داریم که واریانس واقعی لوله‌ها در فاصله فوق قرار دارد.

۵.۷ برآورد تفاضل میانگین دو جمعیت

فرض کنید دو جمعیت داریم که جمعیت اول دارای میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و جمعیت دوم دارای میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد. یک نمونه تصادفی n_1 تایی از جمعیت اول انتخاب کرده و میانگین نمونه آن را $\overline{X}_1$ و واریانس نمونه آن را S_1^2 می‌نامیم و یک نمونه تصادفی n_2 تایی از جمعیت دوم انتخاب کرده و میانگین نمونه آن را $\overline{X}_2$ و واریانس نمونه آن را S_2^2 می‌نامیم. همچنین فرض کنید که این دو نمونه تصادفی از یکدیگر مستقل باشند. می‌خواهیم اختلاف میانگین دو جمعیت یعنی $\mu_1-\mu_2$ را برآورد کنیم. بهترین برآوردگر نقطه‌ای $\mu_1-\mu_2$ عبارت از اختلاف میانگینهای دو نمونه می‌باشد یعنی

$$\widehat{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}_1-\overline{X}_2$$

برای به دست آوردن فاصله اطمینان برای $\mu_1-\mu_2$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف- واریانس دو جمعیت معلوم باشند در این حالت σ_1^2 و σ_2^2 مقادیر معلومی هستند. اگر دو جمعیت نرمال باشند، با توجه به مطالب بخش ۵.۶ و رابطه (۵.۶) تابع محور مناسب عبارت است از

$$Z=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1) \qquad (۷.۷)$$

حال با استفاده از این تابع محور و انجام عملیات مشابه مثال ۳.۲.۷ به دست می‌آوریم که

> یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای تفاضل میانگین دو جمعیت نرمال که واریانسهای آنها معلوم است عبارت است از
>
> $$\mu_1-\mu_2\in\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1-\bar{x}_2+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$
>
> که در آن $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ به ترتیب میانگینهای نمونه‌های تصادفی n_1 تایی و n_2 تایی از دو جمعیت می‌باشند.

توجه کنید که اگر دو جمعیت نرمال نباشند اما $n_1\geq 30$ و $n_2\geq 30$ باشند آنگاه طبق مطالب بخش ۵.۶ رابطه (۷.۷) هنوز به طور تقریبی برقرار است و بنابراین فاصله اطمینان فوق نیز در این حالت یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای $\mu_1-\mu_2$ است.

ب- واریانس دو جمعیت نامعلوم اما مساوی باشند در این حالت $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ می‌باشد و بایستی ابتدا σ^2 یعنی واریانس مشترک دو جمعیت را با واریانس مشترک دو نمونه به صورت زیر برآورد کنیم.

$$\hat{\sigma}^2=S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad (۸.۷)$$

اگر دو جمعیت نرمال باشند آنگاه طبق مطالب بخش ۵.۶ و رابطه (۷.۶) تابع محور مناسب عبارت است از

$$T=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

حال با استفاده از این تابع محور و انجام عملیات مشابه مثال ۳.۲.۷ به دست می‌آوریم که

> یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای تفاضل میانگین دو جمعیت نرمال که واریانسهای آنها نامعلوم اما مساوی هستند عبارت است از
>
> $$\mu_1-\mu_2\in\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$
>
> که در آن s_p^2 واریانس مشترک دو نمونه تصادفی n_1 و n_2 تایی از دو جمعیت می‌باشد.

توجه کنید که اگر $n_1\geq 30$ و $n_2\geq 30$ و جمعیتها غیر نرمال با واریانسهای نامعلوم باشند آنگاه می‌توان از فاصله اطمینان قسمت (الف) با قرار دادن s_1 و s_2 به جای σ_1 و σ_2 استفاده کرد.

مثال ۱.۵.۷ دو شرکت A و B لامپهای روشنایی تولید می‌کنند که به ترتیب دارای انحراف معیارهای ۲۷ و ۳۱ ساعت است. یک نمونه تصادفی ۴۰ تایی از لامپهای تولیدی هر شرکت انتخاب می‌کنیم و به ترتیب متوسط طول عمر لامپها برای این دو نمونه را ۶۴۹ و ۶۳۵ به دست می‌آوریم. با

ساختن یک فاصله اطمینان ۹۶ درصدی برای اختلاف متوسط طول عمر لامپهای دو شرکت، چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید.

حل در این مثال $\sigma_1=۲۷$، $\sigma_2=۳۱$، $n_1=n_2=۴۰$، $\bar{x}_1=۶۴۹$، $\bar{x}_2=۶۳۵$ و $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{۰/۹۸}=۲/۰۵۴$. بنابراین طبق حالت (الف) داریم که

$$\mu_1-\mu_2\in\left(۶۴۹-۶۳۵-۲/۰۵۴\sqrt{\frac{(۲۷)^2}{۴۰}+\frac{(۳۱)^2}{۴۰}},\ ۶۴۹-۶۳۵+۲/۰۵۴\sqrt{\frac{(۲۷)^2}{۴۰}+\frac{(۳۱)^2}{۴۰}}\right)$$

$$=(۱۴-۱۳/۳۵۱,\ ۱۴+۱۳/۳۵۱)=(۰/۶۴۹,\ ۲۷/۳۵۱)$$

چون تمامی فاصله مثبت است پس ۹۶ درصد اطمینان داریم که متوسط طول عمر لامپهای شرکت A از شرکت B بیشتر است.

مثال ۲.۵.۷ دو آزمایشگاه ۱ و ۲ به طور مستقل برای اندازه‌گیری چربی موجود در شیرهای پاستوریزه اقدام می‌نمایند. هر یک تعدادی نمونه انتخاب کرده و نتایج در جدول زیر ثبت شده است. با فرض نرمال بودن دو جمعیت و مساوی بودن واریانسها، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای اختلاف میانگین چربی موجود در شیرهای دو کارخانه به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

آزمایشگاه ۱	۳ ۵ ۷ ۳ ۸ ۶ ۸ ۹ ۴ ۷
آزمایشگاه ۲	۹ ۸ ۸ ۴ ۷ ۶ ۸ ۶

حل از جدول فوق مقادیر زیر را به دست می‌آوریم

$$n_1=۱۰,\ \sum x_{1i}=۶۰,\ \sum x_{1i}^2=۴۰۲,\ \bar{x}_1=۶,\ s_1^2=۴/۶۷$$
$$n_2=۸,\ \sum x_{2i}=۵۶,\ \sum x_{2i}^2=۴۱۰,\ \bar{x}_2=۷,\ s_2^2=۲/۵۷$$

بنابراین

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{۹(۴/۶۷)+۷(۲/۵۷)}{۱۶}=۳/۷۵$$

در نتیجه $s_p=۱/۹۳۷$ و همچنین

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{۰/۹۷۵}(۱۶)=۲/۱۲$$

بنابراین با استفاده از حالت (ب) داریم که

$$\mu_1-\mu_2\in\left(۶-۷-۲/۱۲(۱/۹۳۷)\sqrt{\frac{1}{۱۰}+\frac{1}{۸}},\ ۶-۷+۲/۱۲(۱/۹۳۷)\sqrt{\frac{1}{۱۰}+\frac{1}{۸}}\right)$$

$$=(-۱-۱/۹۴۸,\ -۱+۱/۹۴۸)=(-۲/۹۴۸,\ ۰/۹۴۸)$$

چون فاصله شامل مقادیر منفی و مثبت است پس ۹۵ درصد اطمینان داریم که میانگین چربی موجود در شیرهای دو کارخانه با یکدیگر مساوی است.

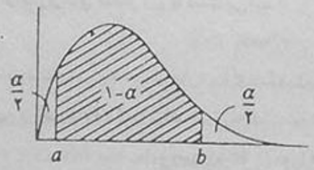
۶.۷ برآورد نسبت واریانس دو جمعیت

دو جمعیت بخش قبل و نمونه‌های تصادفی به دست آمده از آنها را در نظر بگیرید. در این بخش می‌خواهیم نسبت واریانس دو جمعیت یعنی $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ را برآورد کنیم. بهترین برآوردگر نقطه‌ای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ عبارت از نسبت واریانسهای دو نمونه می‌باشد یعنی

$$\widehat{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}=\frac{S_2^2}{S_1^2}$$

برای به دست آوردن یک فاصله اطمینان برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ اگر دو جمعیت نرمال باشند آنگاه طبق مطالب بخش ۶.۶ تابع محور مناسب عبارت است از

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n_1-1,n_2-1) \qquad (۹.۷)$$



شکل ۳.۷

حال با استفاده از این تابع محور و توجه به شکل ۳.۷، با انجام عملیات مشابه مثال ۳.۲.۷ یک فاصله اطمینان $\%۱۰۰(۱-\alpha)$ برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\in\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),\ \frac{s_2^2}{s_1^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right)$$

با توجه به اینکه $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)}$ بنابراین به دست می‌آوریم که

یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای نسبت واریانس دو جمعیت نرمال عبارت است از

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\in\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)},\ \frac{s_2^2}{s_1^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right)$$

که در آن s_1^2 و s_2^2 به ترتیب واریانسهای نمونه‌های n_1 و n_2 تایی از دو جمعیت می‌باشند.

مثال ۱.۶.۷ از یک درس یک کلاس صبح و یک کلاس بعد از ظهر تشکیل شده است. در آخر ترم از کلاس صبح ۸ نفر و از کلاس بعدازظهر ۹ نفر به تصادف انتخاب کرده و از آنها امتحان بعمل آورده‌ایم و نتایج در جدول زیر یادداشت گردیده‌اند.

نمرات کلاس صبح	۹	۷	۸	۱۰	۱۲	۱۵	۷	۱۲	
نمرات کلاس بعدازظهر	۳	۷	۹	۲	۱۸	۱۶	۵	۱۱	۱۰

فرض کنید نمرات دو کلاس از یکدیگر مستقل بوده و از توزیع نرمال پیروی کنند. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای نسبت واریانسها و نسبت انحراف معیارهای نمرات دو کلاس به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل از جدول فوق مقادیر زیر به دست می‌آیند

$$n_1=8,\ \sum x_{1i}=80,\ \sum x_{1i}^2=856,\ s_1^2=8$$
$$n_2=9,\ \sum x_{2i}=81,\ \sum x_{2i}^2=969,\ s_2^2=30$$

همچنین از جدول (VI) داریم که

$$1-\alpha=0/90\Rightarrow\begin{cases}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0/95}(7,8)=3/50\\ F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)=F_{0/95}(8,7)=3/73\end{cases}$$

بنابراین فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ عبارت است از

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\in\left(\frac{30}{8}\times\frac{1}{3/73},\ \frac{30}{8}\times 3/50\right)=(1/005,\ 13/125)$$

حال اگر از مقادیر این فاصله جذر بگیریم فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای نسبت انحراف معیارها

یعنی $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\in(1/003,\ 3/623)$$

چون این فاصله تماماً از یک بزرگتر است پس ۹۰ درصد اطمینان داریم که $\sigma_2^2>\sigma_1^2$ می‌باشد.

۷.۷ تمرینات

۱ فرض کنید X_1 و X_2 دو برآوردگر نااریب و مستقل پارامتر θ با واریانسهای ۲ و ۳ باشند. اگر $T=a_1X_1+a_2X_2$ آنگاه ضرایب a_1 و a_2 را به گونه‌ای پیدا کنید که T یک برآوردگر نااریب با کمترین واریانس برای θ باشد. با مقایسه واریانس برآوردگرهای X_1 و X_2 و T نتیجه بگیرید که کدامیک از این ۳ برآوردگر نااریب، بهتر می‌باشد.

۲ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از جمعیت X با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند. اگر $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ به ترتیب میانگین و واریانس این نمونه باشند، مطلوب است

الف- نشان دهید که $E(\bar{X})=\mu$ و $Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

ب- نشان دهید که

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

ج- با استفاده از قسمت (ب) نشان دهید که $E(S^2)=\sigma^2$

۳ نمونه‌ای به اندازه ۲۵ لامپ روشنایی از یک دسته بزرگ از لامپهای ۴۰واتی گرفته شده است و میانگین عمر لامپهای نمونه ۱۴۱۰ ساعت است. با فرض اینکه عمر لامپها دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۲۰۰ ساعت باشد، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین عمر لامپهای این دسته به دست آورید.

۴ الف- از یک جمعیت نرمال با واریانس ۴ یک نمونه تصادفی به اندازه ۲۵ انتخاب کرده‌ایم و میانگین این نمونه ۲۰ شده است. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین این جمعیت پیدا کنید.

ب- اگر بخواهیم طول فاصله اطمینان را به نصف کاهش دهیم، اندازه نمونه را چه مقدار باید انتخاب کنیم؟

۳۵ آزمایشی برای تعیین غلظت دو نوع متفاوت بنزین سربدار و بدون سرب، نتایج زیر را به دست داده است

نوع سربدار : $n_1 = 25 \quad , \quad \bar{x}_1 = 35.84 \quad , \quad s_1^2 = 130.4576$

نوع بدون سرب : $n_2 = 25 \quad , \quad \bar{x}_2 = 30.60 \quad , \quad s_2^2 = 53.0604$

به فرض نرمال بودن، یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای نسبت واریانسهای دو جمعیت به دست آورید.

۳۶ دو نمونه تصادفی با اندازه‌های ۲۵ و ۱۶ به ترتیب از دانشجویان پسر و دختری که در یک آزمون شرکت کرده‌اند را انتخاب کرده و مشاهده نموده‌ایم که میانگین نمرات دانشجویان پسر ۸۲ و واریانس آن ۶۴ است، در حالیکه میانگین نمرات دانشجویان دختر ۷۸ و واریانس آن ۴۹ می‌باشد. یک فاصله اطمینان ۹۸ درصدی برای نسبت انحراف معیار نمرات پسرها به دخترها به دست آورید. فرض کنید توزیع نمرات نرمال باشد.

www.mohandesidl.ir

@Kiau_IT

فصل هشتم

آزمون فرضهای آماری

۱.۸ مفاهیم اولیه

در فصل قبل یکی از شاخه‌های استنباط آماری یعنی برآورد پارامتر مجهول جمعیت را مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل یکی دیگر از شاخه‌های استنباط آماری یعنی آزمون فرضیه‌های آماری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا تعریف یک فرض آماری را می آوریم.

تعریف ۱.۸ یک فرض آماری ادعائی در مورد یک یا چند جمعیت مورد بررسی است که ممکن است درست یا نادرست باشد. به عبارت دیگر فرض آماری یک ادعا یا گزاره‌ای در مورد توزیع یک جمعیت یا توزیع یک متغیر تصادفی است.

برای درک مفهوم فرض آماری به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱.۸ آزمایشی نشان داده است که میزان مؤثربودن نوعی داروی استاندارد روی یک بیماری بخصوص ۶۰ درصد است. یک داروساز ادعا می‌کند که اثر داروی جدیدی که او ساخته است بیشتر از داروی استاندارد می‌باشد. این ادعای داروساز یک فرض آماری است. حال برای اینکه ادعای این داروساز را مورد بررسی قرار دهیم، بایستی این دارو را روی افراد بیمار جمعیت آزمایش کنیم و نتایج را مورد بررسی قرار دهیم. اما آزمایش این دارو روی تمامی افراد بیمار جمعیت معقولانه نمی‌باشد و بجای آن بایستی دارو را روی تعدادی از افراد بیمار جمعیت آزمایش کنیم که این تعداد افراد همان نمونه ما را تشکیل می‌دهند. بنابراین فرض کنید که این دارو را روی ۲۰ بیمار آزمایش کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیمارانی در بین ۲۰ بیمار در نظر بگیریم

$\beta = P(X\notin C \mid p=\frac{1}{2}) = P(X<9 \mid p=\frac{1}{2}) = P(X\leq 8 \mid p=\frac{1}{2}) = 0/2517$

که توسط داروی جدید معالجه شده‌اند. در این صورت $X\sim B(20,p)$ که در آن p مقداری نامعلوم و درصد مؤثر بودن داروی جدید است. مؤثر بودن داروی جدید به این معنی است که $p>0/60$ است. بنابراین در رابطه با این سئوال که "آیا میزان مؤثر بودن داروی جدید بیشتر از داروی استاندارد است؟" دو حالت (دو فرض) زیر پیش می‌آید.

۱ـ داروی جدید بهتر از داروی استاندارد است $p>0/60$

۲ـ داروی جدید بهتر از داروی استاندارد نیست $p\leq 0/60$

حال بایستی بوسیله اطلاعاتی که از نمونه به دست می‌آید در مورد درست بودن یا نبودن این فرضیات نتیجه‌گیری کنیم.

از دو فرضی را که در یک مسئله آزمون فرض مطرح می‌شود یکی را فرض صفر یا خنثی[1] گفته و آن را با H_0 نمایش داده و دیگری را فرض مقابل[2] گفته و آن را با H_1 نمایش می‌دهند. هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق تائید آن بوسیله اطلاعات حاصل از نمونه ثابت کنیم، خلاف آن ادعا را در فرض صفر H_0 و خود آن ادعا را در فرض مقابل H_1 قرار می‌دهیم. بنابراین در مثال ۱.۱۸ با مسئله آزمون فرضهای زیر مواجه می‌شویم

$$\begin{cases}H_0: p\leq 0/60\\ H_1: p>0/60\end{cases}$$

آزمون فرضهای آماری در یک مسئله آزمون فرضهای آماری اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 "ناسازگار" باشد در این صورت فرض H_0 را رد می‌کنیم و در مقابل فرض H_1 را می‌پذیریم و اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 "سازگار" باشد در این صورت گوئیم که اطلاعات به دست آمده از نمونه دلیلی بر رد فرض H_0 ندارد و یا در حقیقت گوئیم فرض H_0 را می‌پذیریم. مثلاً در مثال ۱.۱۸ اگر درصد افراد بهبود یافته در نمونه از ۶۰ درصد بیشتر باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم و ادعای داروساز را می‌پذیریم و در مقابل اگر درصد افراد بهبود یافته در نمونه کمتر از ۶۰ درصد باشد آنگاه دلیلی بر رد فرض H_0 نداریم. در مسئله آزمون فرضها وقتی می‌گوئیم یک فرض آماری رد شده است به این معنی است که از روی نمونه انتخابی فرض آماری با قاطعیت رد شده است. اما وقتی گوئیم یک فرض آماری پذیرفته شده است به این معنی است که نمونه به دست آمده از جمعیت دلیلی بر رد کردن آن فرض آماری را به دست نمی‌دهد. بنابراین در

1- null hypothesis

2- Alternative hypothesis

$\beta^* = 1-\beta = 1-0/2517 =$

یک مسئله آزمون فرضها هدف ما رد کردن فرض H_0 و در نتیجه پذیرفتن فرض مقابل H_1 یعنی ادعای موردنظر می‌باشد.

ناحیه بحرانی و آماره آزمون برای انجام یک آزمون آماری نیاز به آماره و ناحیه بحرانی آزمون داریم که با ذکر یک مثال آنها را تشریح می‌کنیم.

مثال ۲.۱.۸ فرض کنید که یک داروی استاندارد ۲۵٪ در درمان یک بیماری مؤثر است و شخصی ادعا می‌کند که داروی ساخته شده توسط او ۵۰٪ در درمان آن بیماری مؤثر می‌باشد. بنابراین برای تحقیق در صحت حرف این شخص با آزمون زیر مواجه می‌شویم

$$\begin{cases}H_0: p=\frac{1}{4}\\ H_1: p=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$n=20$, $X\sim B(20,p)$, $C=\{x \mid x\geq 9\}$

$\alpha = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست}) = P(X\in C \mid p=\frac{1}{4}) = P(X\geq 9 \mid p=\frac{1}{4}) = 1-P(X\leq 8) = 0/0409$

حال این سئوال مطرح می‌شود که چگونه این آزمون را انجام دهیم. همانطور که قبلاً گفته شد، بایستی نمونه‌ای از بیماران را در نظر بگیریم و دارو را روی آنها آزمایش کنیم. فرض کنید که ۲۰ بیمار را انتخاب کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیماران بهبود یافته توسط داروی جدید در بین ۲۰ بیمار در نظر بگیریم. در این صورت اگر مقادیر مشاهده شده X کوچک باشد، مثلاً کمتر از ۸ آنگاه نمی‌توان H_0 را رد کرد زیرا در این صورت کمتر از ۴۰٪ افراد بیمار بهبود یافته‌اند و نمی‌تواند $p=\frac{1}{2}$ باشد. حال فرض کنید قرارداد کنیم که اگر مقادیر مشاهده شده X بزرگتر یا مساوی ۹ باشد آنگاه فرض H_0 را رد خواهیم کرد. یعنی اگر مقادیر مشاهده شده X متعلق به مجموعه $C=\{x \mid x\geq 9\}$ باشد آنگاه H_0 را رد کنیم و اگر چنین نبود H_0 را رد نکنیم. به این آماره X که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن فرض H_0 را رد یا قبول می‌کنیم آماره آزمون گویند و به ناحیه C که کلیه مقادیر مربوط به رد فرض H_0 را به دست می‌دهد، ناحیه بحرانی آزمون گویند.

تعریف ۲.۸ آماره $T=T(X_1,\dots,X_n)$ که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن یک فرض را رد یا قبول می‌کنیم آماره آزمون گویند و به مجموعه مقادیری از این آماره که به ازای آن فرض H_0 را بایستی رد کرد، ناحیه بحرانی آزمون گویند و با نماد C نمایش می‌دهند. متمم ناحیه بحرانی یعنی C' را ناحیه پذیرش آزمون گویند.

اگر ناحیه بحرانی C یک آزمون مشخص شود در این صورت با جمع آوری نمونه و محاسبه $t=T(x_1,\dots,x_n)$ می‌توان آزمون آماری را به صورت زیر انجام داد. اگر $T(x_1,\dots,x_n)\in C$

آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت آن را می‌پذیریم.

بنابراین در مثال ۲.۱.۸ اگر $x \geq ۹$ فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر ایـن صـورت آن را می‌پذیریم.

خطاهای آزمون

آیا قضاوتی را که در مثال ۲.۱.۸ انجام دادیم بدون خطا می‌باشد؟ جواب این سئوال منفی است. زیرا ممکن است که واقعاً H_0 درست باشد یعنی داروی جدید نیز ۲۵٪ مؤثر باشد و ما مشاهده کنیم که در این نمونه ۲۰ بیماری ۱۰ بیمار بهبود یافته‌اند و در نتیجه فرض H_0 را رد کنیم. بنابراین ممکن است فرض H_0 درست باشد و ما آن را رد کنیم که این خطا را خطای نوع اول آزمون گویند. در مقابل ممکن است که فرض H_0 درست نباشد یعنی داروی جدید ۵۰٪ مؤثر باشد و ما مشاهده کنیم که ۶ بیمار از بین ۲۰ بیمار بهبود یافته‌اند و در نتیجه فرض H_0 را قبول کنیم. بنابراین ممکن است فرض H_0 نادرست باشد و ما آن را قبول کنیم که این خطا را خطای نوع دوم آزمون گویند. احتمال خطای نوع اول را با α نمایش می‌دهند و آن را **سطح معنی‌دار یا سطح تشخیص** آزمون گویند و احتمال خطای نوع دوم را با β نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\alpha = P(\text{رد شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_0) = P(T(X_1,\dots,X_n) \in C \mid \text{درست است } H_0)$$
$$\beta = P(\text{قبول شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1) = P(T(X_1,\dots,X_n) \notin C \mid \text{درست است } H_1)$$

توان آزمون احتمال رد کردن فرض H_0 در صورتی که فرض H_1 درست باشد یعنی احتمال رد کردن فرض H_0 به حق را توان آزمون گویند و با β^* نشان می‌دهند. بنابراین

$$\beta^* = P(\text{رد شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1) = ۱ - P(\text{قبول شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1) = ۱-\beta$$

مثال ۳.۱.۸ در مثال ۲.۱.۸ احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل در مثال ۲.۱.۸ داشتیم که $C = \{x \mid x \geq ۹\}$ و $X \sim B(۲۰, p)$ بنابراین

$$\alpha = P(X \in C \mid \text{درست } H_0) = P(X \geq ۹ \mid p = \tfrac{۱}{۴})$$
$$= ۱ - P(X \leq ۸ \mid p = \tfrac{۱}{۴}) = ۱ - ۰/۹۵۹۱ = ۰/۰۴۰۹$$
$$\beta = P(X \notin C \mid \text{درست } H_1) = P(X < ۹ \mid p = \tfrac{۱}{۲})$$

$$= P(X \leq ۸ \mid p = \tfrac{۱}{۲}) = ۰/۲۵۱۷$$
$$\beta^* = ۱ - \beta = ۱ - ۰/۲۵۱۷ = ۰/۷۴۸۳$$

بنابراین احتمال خطای نوع اول کم و احتمال خطای نوع دوم زیاد است.

مثال ۴.۱.۸ در مثال ۲.۱.۸ اگر ناحیه بحرانی به صورت $C = \{x \mid x \geq ۸\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل

$$\alpha = P(X \geq ۸ \mid p = \tfrac{۱}{۴}) = ۱ - P(X \leq ۷ \mid p = \tfrac{۱}{۴}) = ۱ - ۰/۸۹۸۲ = ۰/۱۰۱۸$$
$$\beta = P(X < ۸ \mid p = \tfrac{۱}{۲}) = P(X \leq ۷ \mid p = \tfrac{۱}{۲}) = ۰/۱۳۱۶$$
$$\beta^* = ۱ - ۰/۱۳۱۶ = ۰/۸۶۸۴$$

بنابراین احتمال خطای نوع اول افزایش یافت و در مقابل احتمال خطای نوع دوم کاهش یافت.

با مقایسه دو مثال بالا دیده می‌شود که با تغییر دادن ناحیه بحرانی نمی‌توان هم خطای نوع اول و هم خطای نوع دوم را همزمان کاهش داد. موقعی که یکی را کاهش می‌دهیم، دیگری افزایش می‌یابد و برعکس. بنابراین بایستی آن ناحیه بحرانی را انتخاب کنیم که با قرار دادن یک حداکثر مقدار برای احتمال خطای نوع اول بتوان احتمال خطای نوع دوم را تا آنجاکه ممکن است کاهش داد و یا به عبارتی تا آنجاکه ممکن است توان آزمون را حداکثر کرد.

مثال ۵.۱.۸ فرض کنید $X \sim N(\mu, ۴)$ و آزمون زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} H_0 : \mu = ۰ \\ H_1 : \mu = ۱ \end{cases}$$

یک نمونه تصادفی به اندازه $n=۲۵$ از X در نظر می‌گیریم اگر ناحیه بحرانی به صورت $C = \{(X_1,\dots,X_{۲۵}) \mid \overline{X} > c\}$ باشد. مقدار c را چنان تعیین کنید که $\alpha = ۰/۱$ باشد و احتمال خطای نوع دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل می‌دانیم که $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{۴}{۲۵})$ بنابراین

$$۰/۱ = \alpha = P(\overline{X} > c \mid \mu = ۰) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c-۰}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z > ۲/۵c)$$

در نتیجه

$$P(Z \leq ۲/۵c) = ۰/۹ \Rightarrow ۲/۵c = z_{۰/۹} = ۱/۲۸ \Rightarrow c = \frac{۱/۲۸}{۲/۵} = ۰/۵۱۲$$

$$\beta=P(\overline{X}\le C \mid \mu=۱)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{۰/۵۱۲-۱}{\frac{۲}{۵}}\right)=P(Z<-۱/۲۲)=۰/۱۱۱۲$$

$$\beta^{*}=۱-\beta=۱-۰/۱۱۱۲=۰/۸۸۸۸$$

انواع فرضها فرضهای آماری به طور کلی به دو دسته ساده و مرکب تقسیم می‌شوند. فرضی را ساده گوئیم که تحت آن فرض توزیع جمعیت کاملاً مشخص گردد. مثلاً در مثال ۵.۱۸ فرض $H_۰ : \mu=۰$ یک فرض ساده می‌باشد. فرضی را مرکب گوئیم که تحت آن فرض توزیع جمعیت کاملاً مشخص نمی‌گردد. مثلاً در مثال ۱.۱۸ فرض $H_۱ : p>۰/۶$ یک فرض مرکب می‌باشد زیرا اگر این فرض درست باشد مقدار p دقیقاً مشخص نمی‌شود و در نتیجه توزیع جمعیت کاملاً مشخص نمی‌گردد.

آزمونهای یک طرفه و دو طرفه فرض کنید θ پارامتر مجهول جمعیت باشد و بخواهیم آزمونهایی در مورد این پارامتر انجام دهیم. آزمون هر فرضیه آماری که در آن فرضیه مقابل یک طرفه باشد، آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. برای مثال اگر $\theta_۰$ مقدار ثابتی از θ باشد آنگاه هر یک از آزمونهای زیر یک طرفه می‌باشد

$$\begin{cases} H_۰ : \theta\le\theta_۰ \\ H_۱ : \theta>\theta_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \theta=\theta_۰ \\ H_۱ : \theta<\theta_۰ \end{cases}$$

آزمون هر فرضیه آماری که در آن فرضیه مقابل دو طرفه باشد یعنی

$$\begin{cases} H_۰ : \theta=\theta_۰ \\ H_۱ : \theta\neq\theta_۰ \end{cases}$$

یک آزمون دو طرفه نامیده می‌شود.

مراحل انجام یک آزمون با توجه به مطالب گفته شده در این بخش، برای انجام یک آزمون آماری بایستی مراحل زیر را طی کرد.

۱ـ تعیین فرضهای صفر $H_۰$ و مقابل $H_۱$

۲ـ تعیین یک سطح معنی دار α که معمولاً آن را ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱ می‌گیرند.

۳ـ تعیین آماره آزمون $T=T(X_۱,\dots,X_n)$ که معمولاً براساس برآوردگر نقطه‌ای پارامتر مجهول θ می‌باشد.

۴ـ تعیین ناحیه بحرانی آزمون C که بر اساس آماره آزمون، فرض مقابل آزمون و سطح

معنی دار α می‌باشد.

۵ـ محاسبه مقدار مشاهده شده آماره آزمون بر اساس نمونه تصادفی مشاهده شده $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n

۶ـ نتیجه گیری: اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون یعنی $T(x_۱,\dots,x_n)$ در ناحیه بحرانی C قرار گرفت آنگاه فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم و در غیر این صورت فرض $H_۰$ را قبول می‌کنیم.

در بخش بعد این مراحل را در انجام آزمون روی پارامترهای مختلف جمعیت بکار می‌بریم.

۲.۸ آزمون فرضهای آماری روی پارامترهای جمعیت

در این بخش با توجه به مطالب بیان شده در بخش قبل آزمون فرضهای آماری روی میانگین و واریانس جمعیت در حالتهای مختلف را انجام می‌دهیم. در ابتدا آزمون فرض روی میانگین یک جمعیت موقعی که واریانس جمعیت معلوم است را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که از یک جمعیت X با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم $\sigma^۲$ یک نمونه تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... و X_n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمونهایی روی میانگین μ انجام دهیم. برای این منظور ۳ حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu=\mu_۰ \\ H_۱ : \mu>\mu_۰ \end{cases}$ که در آن $\mu_۰$ مقداری معلوم است. اگر $\overline{X}$ برآوردگر μ مقادیر بزرگ را اختیار کند یعنی $\overline{X}>c$ آنگاه فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی آزمون به صورت $\overline{X}>c$ است که در آن c به گونه‌ای تعیین می‌گردد که سطح معنی دار آزمون برابر مقدار مشخص شده α باشد یعنی

$$\alpha=P(\overline{X}>c \mid \mu=\mu_۰)$$

حال اگر جمعیت نرمال باشد و یا اینکه نرمال نبوده اما $n\ge۳۰$ باشد آنگاه طبق مطالب بخش ۲.۶ داریم که

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(۰,۱)$$

بنابراین برای تعیین c داریم که

$$\alpha=P(\overline{X}>c \mid \mu=\mu_۰)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{c-\mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=P\left(Z>\frac{c-\mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

در نتیجه
$$\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \Rightarrow c=\mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین ناحیه بحرانی آزمون به صورت $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$ می‌باشد.
در نتیجه

> در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu>\mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد شود اگر و فقط اگر
> $$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 به صورت $H_0 : \mu\le\mu_0$ باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی هنوز به صورت فوق می‌باشد.

ب در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu<\mu_0 \end{cases}$ اگر $\bar{X}$ مقادیر کوچک را اختیار کند یعنی $\bar{X}<c$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}<c$ است که در آن c با انجام عملیات مشابه قسمت (الف) برابر $c=\mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ به دست می‌آید و بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}<\mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$ خواهد بود. بنابراین

> در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu<\mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد شود اگر و فقط اگر
> $$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 به صورت $H_0 : \mu\ge\mu_0$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی هنوز به صورت فوق می‌باشد.

ج در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu\neq\mu_0 \end{cases}$ اگر $\bar{X}$ مقادیر کوچک یا مقادیر بزرگ را اختیار کند یعنی $\bar{X}>c_2$ یا $\bar{X}<c_1$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}>c_2$ یا $\bar{X}<c_1$ است که در آن c_1 و c_2 به صورت زیر تعیین می‌گردند.
$$\alpha=P(\bar{X}<c_1 \text{ یا } \bar{X}>c_2 \mid \mu=\mu_0) \Rightarrow 1-\alpha=P(c_1<\bar{X}<c_2 \mid \mu=\mu_0)$$

بنابراین
$$1-\alpha=P\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{c_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

و در نتیجه
$$\frac{c_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=-\frac{c_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

و یا $c_1=\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $c_2=\mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X}>\mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ یا $\bar{X}<\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا معادلاً $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ می‌باشد.

بنابراین

> در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu\neq\mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد شود اگر و فقط اگر
> $$|Z|=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

مثال ۱.۲.۸ یک کارخانه تولید کننده لامپهای روشنایی، لامپهایی تولید می‌کند که طول عمر آنها از توزیع نرمال با حد متوسط ۸۰۰ ساعت و انحراف معیار ۴۰ ساعت پیروی می‌کند. می‌خواهیم آزمون $\mu=۸۰۰$ در مقابل $\mu\neq۸۰۰$ را انجام دهیم. اگر یک نمونه تصادفی ۳۰ تایی از آن لامپها دارای حد متوسط طول عمر ۷۸۸ ساعت باشد، آزمون فوق را در سطح معنی دار ۰/۰۴ انجام دهید.

حل آزمون از نوع (ج) می‌باشد که در آن $\bar{x}=۷۸۸$ ، $\sigma=۴۰$ ، $n=۳۰$ ، $\mu_0=۸۰۰$ و $\alpha=۰/۰۴$ است بنابراین
$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{۰/۹۸}=۲/۰۵ \quad , \quad Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{۷۸۸-۸۰۰}{\frac{۴۰}{\sqrt{۳۰}}}=-۱/۶۴۳$$

چون $|Z|=۱/۶۴۳ < z_{1-\frac{\alpha}{2}}=۲/۰۵$ بنابراین فرض H_0 رد نمی‌شود، یعنی حد متوسط طول عمر لامپها برابر ۸۰۰ ساعت است.

مثال ۲.۲.۸ تعداد زیادی از بیماران مبتلا به یک بیماری بخصوص را گرد آورده و گزارش کرده‌اند که مدت درمان بیماری به روش استاندارد دارای میانگین ۱۵ روز و انحراف معیار ۳ روز می‌باشد. ادعا شده که یک روش جدید می‌تواند مدت درمان را کوتاه‌تر کند و انحراف معیار درمان

همان ۳ روز می‌باشد. برای روش جدید درمان را بر روی ۷۰ بیمار آزمایش کرده و میانگین مدت درمان ۱۴ روز شده است. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۲۵ روش جدید بهتر است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu=15 \\ H_1: \mu<15 \end{cases}$ مواجه هستیم، پس فرض H_0 را رد می‌کنیم در صورتی که $Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$ از طرفی داریم که

$$\alpha=0.025 \Rightarrow z_{1-\alpha}=z_{0.975}=1.96$$

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{14-15}{\frac{3}{\sqrt{70}}}=-2.789$$

چون $-2.789 = Z < -z_{1-\alpha} = -1.96$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی میانگین مدت درمان روش جدید کمتر است.

برای آزمون فرض روی میانگین موقعی که واریانس نامعلوم است، آزمون فرض روی واریانس یک جمعیت، آزمون فرض روی تفاضل میانگین دو جمعیت و یا نسبت واریانس دو جمعیت نیز می‌توان با انجام عملیات مشابه حالتهای (الف) تا (ج) نواحی بحرانی آزمون را تعیین کرد. حاصل این عملیات در جدولهای ۱.۸ و ۲.۸ ارایه گردیده است. در جدول ۱.۸ یک نمونه تصادفی nتایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 انتخاب شده و آزمونهایی روی μ یا σ^2 انجام گرفته است. در آزمونهای ۱ تا ۳ اگر $n \geq 30$ باشد فرض نرمال بودن جمعیت را می‌توان حذف کرد. در جدول ۲.۸ یک نمونه تصادفی n_1تایی از جمعیت نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و یک نمونه تصادفی n_2تایی از جمعیت نرمال دیگری با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 انتخاب شده‌اند و این دو نمونه از یکدیگر مستقل هستند. سپس آزمونهایی روی تفاضل میانگین دو جمعیت و یا نسبت واریانس دو جمعیت انجام گرفته است. در آزمونهای ۱۰ تا ۱۲ اگر $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$ باشد فرض نرمال بودن را می‌توان حذف کرد. در زیر مثالهایی از این آزمونها را می‌آوریم. توجه کنید اگر در مسئله‌ای مقدار α مشخص نشده باشد آن را ۰/۰۵ در نظر می‌گیریم.

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ معلوم	$Z>z_{1-\alpha}$
۲	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ معلوم	$Z<-z_{1-\alpha}$
۳	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ معلوم	$\|Z\|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
۴	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ، σ نامعلوم	$T>t_{1-\alpha}(n-1)$
۵	$\mu=\mu_0$ یا $\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ، σ نامعلوم	$T<-t_{1-\alpha}(n-1)$
۶	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ، σ نامعلوم	$\|T\|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
۷	$\sigma^2=\sigma_0^2$ یا $\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
۸	$\sigma^2=\sigma_0^2$ یا $\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2<\chi^2_{\alpha}(n-1)$
۹	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ یا $X^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

جدول ۱.۸ آزمونهای آماری روی میانگین و واریانس یک جمعیت نرمال

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱۰	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\le d_0$	$\mu_1-\mu_2>d_0$	$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	$Z>z_{1-\alpha}$
۱۱	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\ge d_0$	$\mu_1-\mu_2<d_0$	$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	$Z<-z_{1-\alpha}$
۱۲	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	$\lvert Z\rvert>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
۱۳	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\le d_0$	$\mu_1-\mu_2>d_0$	$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1=\sigma_2$ ولی نامعلوم	$T>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
۱۴	$\mu_1-\mu_2=d_0$ یا $\mu_1-\mu_2\ge d_0$	$\mu_1-\mu_2<d_0$	$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1=\sigma_2$ ولی نامعلوم	$T<-t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
۱۵	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1=\sigma_2$ ولی نامعلوم	$\lvert T\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
۱۶	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
۱۷	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F<F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
۱۸	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ یا $F>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

جدول ۲.۸ آزمونهای آماری روی تفاضل میانگینها و نسبت واریانسهای دو جمعیت نرمال

مثال ۳.۲.۸ نمونه تصادفی از پرونده‌های فراوان شرکتی نشان می‌دهد که سفارشات برای قطعه معینی از ماشینها به ترتیب در ۱۰، ۱۲، ۱۹، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۱۱ و ۱۳ روز بایگانی شده است. اگر تعداد روزهای بایگانی از توزیع نرمال پیروی کند، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌توان ادعا کرد که میانگین زمان بایگانی چنین سفارشاتی از ۱۰/۵ روز بیشتر است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \mu=10/5 \\ H_1: \mu>10/5 \end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شماره ۴ استفاده می‌کنیم. از داده‌ها به دست می آوریم که $n=8$ و $\sum x_i=112$ و $\sum x_i^2=1640$ بنابراین

$$\bar{x}=\frac{112}{8}=14 \quad , \quad s^2=\frac{1}{7}\left[1640-\frac{(112)^2}{8}\right]=10/286$$

$$\alpha=0/01 \Rightarrow t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0/99}(7)=3/0$$

$$T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{14-10/5}{\sqrt{\frac{10/286}{8}}}=3/087$$

چون $3/087=T>t_{1-\alpha}(n-1)=3/0$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی میانگین زمان بایگانی بیش از ۱۰/۵ روز است.

مثال ۴.۲.۸ یک تولید کننده قطعات پیش ساخته مدعی است که انحراف معیار مقاومت محصولات او برابر ۱۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. یک نمونه تصادفی ۱۰تایی از این محصولات نتایج $\bar{x}=312$ و $s^2=195$ را به دست داده است. اگر اندازه مقاومت این محصولات دارای توزیع نرمال باشند، آیا نتایج به دست آمده با ادعای تولید کننده سازگار است؟ سطح معنی‌دار را ۰/۰۵ بگیرید.

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0: \sigma^2=100 \\ H_1: \sigma^2\neq 100 \end{cases}$ مواجه هستیم بنابراین از آزمون شماره ۹ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$X^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9(195)}{100}=17/55$$

$$\alpha=0/05 \Rightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0/025}(9)=2/70 \quad , \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0/975}(9)=19/0$$

چون $۱۷/۵۵=X^{۲} \not< \chi^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)=۲/۷۰$ و $۱۷/۵۵=X^{۲} \not> \chi^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)=۱۹/۰$ پس فرض $H_۰$ رد نمی‌شود یعنی نتایج با ادعای تولید کننده سازگار است.

مثال ۵.۲.۸ یک نمونه تصادفی به اندازه ۳۶ از یک جمعیت با انحراف معیار ۵/۲ دارای میانگین ۸۱ است. یک نمونه تصادفی دیگر به اندازه ۴۹ از یک جمعیت دیگر با انحراف معیار ۳/۴ دارای میانگین ۷۶ است. آیا در سطح معنی دار ۰/۰۶ میانگین این دو جمعیت با هم برابر است؟

حل در این مثال با آزمون
$$\begin{cases} H_۰ : \mu_۱=\mu_۲ \\ H_۱ : \mu_۱ \neq \mu_۲ \end{cases}$$
مواجه هستیم که واریانسها معلوم می‌باشند. بنابراین از آزمون شماره ۱۲ با $d_۰=۰$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_۱=۳۶ \ , \ \sigma_۱=۵/۲ \ , \ \bar{x}_۱=۸۱$$
$$n_۲=۴۹ \ , \ \sigma_۲=۳/۴ \ , \ \bar{x}_۲=۷۶$$

بنابراین

$$Z=\frac{(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)-d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}}=\frac{۸۱-۷۶-۰}{\sqrt{\frac{(۵/۲)^۲}{۳۶}+\frac{(۳/۴)^۲}{۴۹}}}=۵/۰۳$$

$$\alpha=۰/۰۶ \Rightarrow z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}=z_{۰/۹۷}=۱/۸۸$$

چون $۵/۰۳=|Z|>z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}=۱/۸۸$ پس فرض $H_۰$ رد می‌شود، یعنی $\mu_۱\neq\mu_۲$ و چون $Z=۵/۰۳>۱/۸۸$ بنابراین نتیجه می‌شود که $\mu_۱>\mu_۲$ است.

مثال ۶.۲.۸ دو گروه ۴۰ نفری برای انجام یک آزمایش انتخاب شده‌اند. گروه اول را با رژیم غذایی A و گروه دوم را با رژیم غذایی B مورد آزمایش قرار داده‌ایم. میانگین و انحراف استاندارد کاهش وزن در رژیم غذایی A به ترتیب ۱۱ و ۴/۳ کیلوگرم و در رژیم غذایی B به ترتیب ۸ و ۵/۷ کیلوگرم بوده است. در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا می‌توان ادعا کرد که میانگین کاهش وزن بوسیله رژیم غذایی A از میانگین کاهش وزن بوسیله رژیم غذایی B به اندازه حداقل یک کیلوگرم بیشتر است؟ فرض کنید کاهش وزن دو نوع رژیم دارای توزیع نرمال با واریانسهای مساوی باشند.

حل در این مثال با آزمون
$$\begin{cases} H_۰ : \mu_A \leq \mu_B+۱ \\ H_۱ : \mu_A > \mu_B+۱ \end{cases}$$
مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۱۳ با $d_۰=۱$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_۱=۴۰ \ , \ \bar{x}_۱=۱۱ \ , \ s_۱=۴/۳$$
$$n_۲=۴۰ \ , \ \bar{x}_۲=۸ \ , \ s_۲=۵/۷$$

بنابراین

$$s_p^۲=\frac{۳۹(۴/۳)^۲+۳۹(۵/۷)^۲}{۷۸}=۲۵/۴۹$$

$$T=\frac{(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)-d_۰}{s_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}}=\frac{۱۱-۸-۱}{\sqrt{۲۵/۴۹}\sqrt{\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۴۰}}}=۱/۷۷۲$$

$$\alpha=۰/۰۵ \Rightarrow t_{۱-\alpha}(n_۱+n_۲-۲)=t_{۰/۹۵}(۷۸)=Z_{۰/۹۵}=۱/۶۴$$

چون $۱/۷۷۲=T>t_{۱-\alpha}(n_۱+n_۲-۲)=۱/۶۴$ بنابراین فرض $H_۰$ رد می‌شود و ادعای گفته شده درست می‌باشد.

مثال ۷.۲.۸ یک درس را به دو روش تدریس نموده‌ایم. سپس در روش اول از ۱۶ نفر امتحان به عمل آورده و انحراف استاندارد نمرات ۹ به دست آمد، در حالیکه در روش دوم از ۲۵ نفر امتحان بعمل آورده و انحراف استاندارد نمرات ۱۲ به دست آمده است. آیا در سطح معنی دار ۰/۰۱ می‌توان متقاعد شد که پراکندگی نمرات در روش اول کمتر از روش دوم است؟ فرض کنید نمرات دو روش از توزیع نرمال پیروی می‌کنند.

حل در این مثال با آزمون
$$\begin{cases} H_۰ : \sigma_۱^۲ \geq \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ < \sigma_۲^۲ \end{cases}$$
مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۲۷ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_۱=۱۶ \ , \ s_۱=۹ \ , \ n_۲=۲۵ \ , \ s_۲=۱۲$$

$$F=\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲}=\left(\frac{۹}{۱۲}\right)^۲=۰/۵۶۲۵$$

$$\alpha=۰/۰۱ \Rightarrow \quad F_\alpha(n_۱-۱,n_۲-۱)=\frac{۱}{F_{۱-\alpha}(n_۲-۱,n_۱-۱)}=\frac{۱}{F_{۰/۹۹}(۲۴,۱۵)}=۰/۳۰۴$$

چون $۰/۵۶۲۵=F \not< F_\alpha(n_۱-۱,n_۲-۱)=۰/۳۰۴$ پس فرض $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی پراکندگی نمرات در روش اول کمتر نیست.

مثال ۸.۲.۸ ادعا شده است که وزن قوطی‌های روغنی بخصوص ۱۰ انس است. اگر وزنهای یک نمونهٔ تصادفی ۱۰تایی از این قوطیها به صورت زیر باشد و وزن قوطیها دارای توزیع نرمال باشد، آیا این ادعا را می‌پذیرید؟

$$10/2 , 9/7 , 10/1 , 10/3 , 10/1 , 9/8 , 9/9 , 10/4 , 10/3 , 9/8$$

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu \neq 10 \end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شماره ۶ با $\mu_0 = 10$ و $\alpha = 0/05$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n = 10 \ , \quad \sum x_i = 100/6 \ , \quad \sum x_i^2 = 1012/58$$

در نتیجه $\bar{x} = 10/06$ و $s = 0/246$ و همچنین

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0/975}(9) = 2/26$$

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{10/06 - 10}{\frac{0/246}{\sqrt{10}}} = 0/771$$

چون $2/26 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \not< |T| = 0/771$ پس H_0 رد نمی‌شود یعنی ادعا درست می‌باشد.

مثال ۹.۲.۸ در یک آزمون حساب سال پنجم ابتدایی نمرهٔ ۸ دانش‌آموز پسر و ۶ دانش‌آموز دختر به صورت زیر به دست آمده است.

پسرها	۱۰	۱۷	۱۴	۱۲	۱۱	۱۶	۱۸	۱۹
دخترها	۱۶	۱۸	۱۷	۱۳	۱۴	۱۱		

با فرض نرمال بودن نمره‌ها و تساوی واریانسها، آیا به طور متوسط نمرات دانش‌آموزان پسر و دختر یکسان است؟

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۱۵ با $d_0 = 0$ و $\alpha = 0/05$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله به دست می‌آوریم که

$$n_1 = 8 \ , \quad \bar{x}_1 = 14/625 \ , \quad s_1^2 = 11/41$$
$$n_2 = 6 \ , \quad \bar{x}_2 = 14/83 \ , \quad s_2^2 = 6/97$$

بنابراین

$$s_p^2 = \frac{7(11/41) + 5(6/97)}{12} = 9/56$$

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{14/625 - 14/83 - 0}{\sqrt{9/56}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}} = -0/123$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0/975}(12) = 2/18$$

چون $2/18 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \not< |T| = 0/123$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی به طور متوسط نمرات دانش‌آموزان پسر و دختر یکسان است.

۳.۸ آزمون برازندگی

در آزمونهایی که تاکنون در این فصل انجام داده‌ایم فرض کرده‌ایم که جمعیت دارای یک توزیع احتمال بخصوص است و در مورد پارامترهای مجهول جمعیت مانند μ و σ^2 آزمونهایی را انجام داده‌ایم. در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن توزیع احتمال جمعیت خود نیز مجهول می‌باشد و ما به جمعیت توزیع مشخصی را نسبت داده و آن را مورد آزمون قرار می‌دهیم. یعنی آزمونی را در نظر می‌گیریم که تعیین می‌کند آیا جمعیتی دارای یک توزیع مشخص است یا نه. در بسیاری موارد یک توزیع احتمال برای یک سری مشاهدات در نظر گرفته می‌شود، مثلاً توزیع دو جمله‌ای برای درصدی از جمعیت که دارای خصیصه معینی هستند و یا توزیع یکنواخت برای هم شانس بودن انتخاب افراد جمعیت یا توزیع پواسون برای تعداد غلطهای چاپی در صفحات کتاب و ... می‌خواهیم بدانیم که مشاهدات به دست آمده بر اساس یک نمونه تصادفی از جمعیت، با یک توزیع مفروض مطابقت دارد یا نه؟

توزیعی را که حدس می‌زنیم داده‌ها از آن باشند، توزیع برازنده بر داده‌ها و آزمون لازم را آزمون برازندگی می‌نامند. یکی از این آزمونهای برازندگی، آزمون مربع-کای برای برازندگی توزیع می‌باشد که در زیر آن را می‌آوریم.

فرض کنید که نتیجه یک آزمایش تصادفی به یکی از k طبقه دو به دو مجزای C_1، C_2، ... و C_k متعلق باشد به طوری که احتمال متعلق بودن به طبقه C_i برابر مقدار $0 < p_i < 1$ باشد که $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. این آزمایش تصادفی را n مرتبه مستقلاً انجام می‌دهیم و قرار می‌دهیم

$i=1,2,\dots,k$ تعداد دفعاتی از این n آزمایش که نتیجه آزمایش به طبقه C_i متعلق باشد $= O_i$

در این صورت $i=1,2,\dots,k$ ، $O_i \sim B(n,p_i)$ و متغیر تصادفی O_i را فراوانی مشاهده شده[1] می‌نامند. می‌خواهیم این فرض را آزمون کنیم که قانون احتمال آزمایش تصادفی بوسیله p_i^*ها مشخص می‌شود یا نه، یعنی

$$\begin{cases} H_0 : p_1=p_1^*,\dots,p_k=p_k^* \\ H_1 : p_i \neq p_i^* \quad i=1,2,\dots,k \text{ برای حداقل یک } \end{cases}$$

که در آن p_i^*ها مقادیر معینی هستند و $0<p_i^*<1$ و $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. اگر فرض H_0 درست باشد آنگاه $E(O_i)=np_i^*$، یعنی اگر H_0 درست باشد و آزمایش را n بار مستقلاً تکرار کنیم، انتظار داریم که در این n آزمایش به طور متوسط فراوانی نتایجی که به طبقه C_i تعلق دارند برابر $e_i=E(O_i)=np_i^*$ باشد. عدد e_i را فراوانی مورد انتظار[2] می‌نامند. واضح است که

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} e_i = n$$

برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 از آماره زیر که به آماره X^2 پیرسون مشهور است استفاده می‌کنیم.

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i-e_i)^2}{e_i} \qquad (1.8)$$

می‌توان نشان داد که به طور تقریبی $X^2 \sim \chi^2_{(k-1)}$. واضح است که فرض H_0 موقعی پذیرفته می‌شود که اختلاف O_iها و e_iها و در نتیجه X^2 کوچک باشد. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $X^2>c$ خواهد بود. اگر بخواهیم سطح معنی‌دار آزمون برابر α باشد آنگاه ناحیه بحرانی به صورت $X^2>\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ تبدیل می‌شود. یعنی

> در آزمون برازندگی، فرض H_0 (برازندگی توزیع) رد می‌شود اگر و فقط اگر
> $X^2>\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

مثال ۱.۳.۸ یک تاس را ۱۲۰ بار پرتاب می‌کنیم و مشاهدات زیر را به دست می‌آوریم. در سطح معنی‌دار $\alpha=0/05$ آزمون کنید که آیا تاس سالم است

1- observed frequency

2- Expected frequency

شماره تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
فراوانی	۱۸	۲۳	۱۶	۲۱	۱۸	۲۴	۱۲۰

حل در این مثال با آزمون زیر مواجه هستیم

$$\begin{cases} H_0 : p_1=p_2=\dots=p_6=\frac{1}{6} \\ H_1 : p_i \neq \frac{1}{6} \quad i=1,2,\dots,6 \text{ برای حداقل یک } \end{cases}$$

بنابراین $e_i=np_i^*=120\times\frac{1}{6}=20 \,,\, i=1,\dots,6$ و در نتیجه جدول زیر را به دست می‌آوریم

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
O_i	۱۸	۲۳	۱۶	۲۱	۱۸	۲۴	۱۲۰
e_i	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۱۲۰

و از این جدول داریم که

$$X^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(O_i-e_i)^2}{e_i}=\frac{(18-20)^2}{20}+\dots+\frac{(24-20)^2}{20}=2/5$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)=\chi^2_{0/95}(5)=11/1$$

چون $11/1=\chi^2_{1-\alpha}(k-1) \not< X^2=2/5$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی تاس سالم است.

تذکر ۱ آزمون برازندگی را می‌توان در مواردی که مقادیر مورد انتظار e_iها (و یا p_i^*ها) به پارامترهای نامعلوم $\theta_1, \theta_2, \dots$ و θ_t وابسته هستند نیز بکار برد. برای این منظور ابتدا $\theta_1, \theta_2, \dots$ و θ_t را بوسیله مشاهدات $O_1, O_2, \dots$ و O_k برآورد می‌کنیم. سپس به وسیلهٔ برآوردهای $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots$ و $\hat{\theta}_t$ مقادیر مورد انتظار $e_1, e_2, \dots$ و e_k را محاسبه و در فرمول X^2 قرار می‌دهیم. در این حالت فرض H_0 را رد خواهیم کرد اگر و فقط اگر $X^2>\chi^2_{1-\alpha}(k-1-t)$ که در آن t تعداد پارامترهایی است که توسط مشاهدات برآورد شده‌اند.

تذکر ۲ اگر در آزمون برازندگی مقدار بعضی از مقادیر مورد انتظار کوچکتر از ۵ باشد، بایستی چند طبقهٔ مجاور را با هم ادغام کنیم، تا جمع مقادیر مورد انتظار طبقات جدید بزرگتر یا مساوی ۵ شود.

مثال ۲.۳.۸ تعداد غلطهای چاپی در ۱۰۰ صفحه یک کتاب را شمرده‌ایم و مشاهدات در جدول

زیر آورده شده است. آیا توزیع پواسون در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ بر داده‌ها برازنده است.

تعداد غلطها i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد صفحات o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱

حل اگر X تعداد غلطهای چاپی در یک صفحه کتاب باشد آنگاه آزمون
$$\begin{cases} H_0: X\sim P(\mu) \\ H_1: X\not\sim P(\mu)\end{cases}$$
مورد نظر است. در ابتدا به وسیلهٔ مشاهدات، μ میانگین توزیع پواسون را برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i=\frac{1}{100}\left[(0\times 36)+(1\times 40)+\dots+(6\times 1)\right]=1$$

بنابراین تحت فرض H_0 داریم که

$$f_X(x)=\frac{e^{-1}1^x}{x!}=\frac{1}{x!}e^{-1}\qquad x=0,1,2,\dots$$

در نتیجه

$$p_0=P(X=0)=e^{-1}=0/3679 \Rightarrow e_0=np_0=100(0/3679)=36/79$$
$$p_1=P(X=1)=e^{-1}=0/3679 \Rightarrow e_1=36/79$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
O_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۶/۱۳	۱/۵۳	۰/۳۱	۰/۰۵	۱۰۰

چون ۳ طبقهٔ آخر دارای مقادیر مورد انتظار کمتر از ۵ هستند پس ۴ طبقهٔ آخر را با هم ادغام می‌کنیم و جدول زیر به دست می‌آید

i	۰	۱	۲	بزرگتر از ۲	جمع
O_i	۳۶	۴۰	۱۹	۵	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۸/۰۲	۱۰۰

بنابراین

$$X^2=\sum_{i=0}^{3}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}=\frac{(36-36/79)^2}{36/79}+\dots+\frac{(5-8/02)^2}{8/02}=1/454$$
$$d.f.=k-1-t=4-1-1=2 \Rightarrow \chi^2_{1-\alpha}(k-1-t)=\chi^2_{0/95}(2)=5/99$$

چون $1/454=X^2\not>\chi^2_{1-\alpha}(k-1-t)=5/99$ پس H_0 رد نمی‌شود، یعنی توزیع پواسون بر داده‌ها برازنده است.

مثال ۳.۳.۸ طول عمر ۱۰۰۰ لامپ یک کارخانه را اندازه‌گیری کرده‌ایم و اطلاعات جدول زیر به دست آمده است همچنین $\sum x_i=200000$. سرپرست کارخانه ادعا دارد که طول عمر لامپها دارای توزیع نمایی است. آیا ادعای او را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌پذیرید.

طول عمر t	تعداد
$t\le 150$	۵۴۳
$150<t\le 300$	۲۵۸
$300<t\le 450$	۱۲۰
$450<t\le 600$	۴۸
$600<t\le 750$	۲۰
$750<t$	۱۱

حل اگر X طول عمر لامپ تولیدی کارخانه باشد آنگاه آزمون
$$\begin{cases} H_0: X\sim E(\theta) \\ H_1: X\not\sim E(\theta)\end{cases}$$
مورد نظر است. در ابتدا θ میانگین توزیع نمایی را بوسیله مشاهدات برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\theta}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=\frac{200000}{1000}=200$$

بنابراین تحت فرض H_0 داریم که

$$f_X(x)=\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x}\qquad x>0$$

در نتیجه

$$p_1=P(X\le 150)=\int_0^{150}\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x}dx=0/5277 \Rightarrow e_1=1000p_1=527/7$$
$$p_2=P(150<X\le 300)=\int_{150}^{300}\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x}dx=0/2492 \Rightarrow e_2=249/2$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
O_i	۵۴۳	۲۵۸	۱۲۰	۴۸	۲۰	۱۱	۱۰۰۰
e_i	۵۲۷/۷	۲۴۹/۲	۱۱۷/۷	۵۵/۶	۲۶/۳	۲۳/۵	۱۰۰۰

بنابراین

$$X^{۲}=\sum_{i=۱}^{۶}\frac{(o_i-e_i)^{۲}}{e_i}=\frac{(۵۴۳-۵۲۷/۷)^{۲}}{۵۲۷/۷}+\dots=۹/۹۹۶$$

$$d.f.=k-۱-t=۶-۱-۱=۴ \Rightarrow \chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t)=\chi^{۲}_{/۹۹}(۴)=۱۳/۳$$

چون $۱۳/۳=\chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t) \not< X^{۲}=۹/۹۹۶$ پس $H_{۰}$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع نمایی برازنده بر داده‌ها است.

۴.۸ تمرینات

۱ در هر کدام از حالتهای زیر، فرض صفر و فرض مقابل را مشخص کنید.

الف- یک تولید کنندهٔ اتومبیل می‌خواهد ادعای تهیه کننده‌ای را بررسی کند که حداکثر مقاومت سیمهایی که می‌سازد کمتر از ۵۰ اهم باشد.

ب- ادارهٔ تحقیقات ادعا می‌کند رشته‌هایی که برای لامپها درست کرده است، عمر متوسط لامپها را تا بیش از ۳۰۰ ساعت افزایش خواهد داد. یک بازرس علاقه‌مند به بررسی این ادعا می‌باشد.

۲ می‌خواهیم برای یک سکه آزمون $\begin{cases}H_{۰}: p=\frac{۱}{۲}\\ H_{۱}: p=\frac{۳}{۴}\end{cases}$ را انجام دهیم. سکه را ده بار پرتاب می‌کنیم و X را تعداد شیرها در این ده پرتاب در نظر می‌گیریم. اگر $X\geq ۸$ فرض $H_{۰}$ را رد می‌کنیم.

الف- احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

ب- اگر $X\geq c$ را ناحیهٔ بحرانی بگیریم، c را چنان تعیین کنید تا احتمال خطای نوع دوم بیش از ۰/۰۹ نباشد.

۳ نسبت خانواده‌های ساکن در شهر بخصوصی که از کمپانی A شیر می‌خرند ۰/۶ است. اگر از یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ خانواری ۳ یا کمتر از کمپانی A شیر بخرند فرضیهٔ صفر $p=۰/۶$ را به نفع فرضیهٔ مقابل $p<۰/۶$ رد می‌کنیم. احتمال خطای نوع اول را محاسبه نمایید. احتمال خطای نوع دوم را برای مقادیر $p=۰/۳$، $p=۰/۴$ و $p=۰/۵$ محاسبه نمایید.

۴ در صورتی که از یک جمعیت نرمال با واریانس ۴ یک نمونهٔ تصادفی به حجم ۱۶ انتخاب کرده باشیم، در آزمون $\begin{cases}H_{۰}: \mu=۸\\ H_{۱}: \mu=۱۰\end{cases}$ در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ احتمال خطای نوع دوم را

محاسبه کنید.

۵ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد

$$f_{\theta}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{۱}{\theta}x} & x>۰,\theta>۰\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

می‌خواهیم آزمون $\begin{cases}H_{۰}: \theta=۲۰۰\\ H_{۱}: \theta=۵۰۰\end{cases}$ را انجام دهیم. اگر $X>۳۰۰$ مشاهده شود، فرض $H_{۰}$ را رد می‌کنیم. احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

۶ متوسط قد دانشجویان مرد سال اول یک دانشکده بخصوص ۶۸/۵ اینچ با انحراف معیار ۲/۷ اینچ گزارش شده است. اگر یک نمونهٔ تصادفی ۵۰ تایی از دانشجویان سال اول فعلی دارای حد متوسط قد ۶۹/۷ اینچ باشد، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۲ دلیلی برای تصور تغییر در حد متوسط قد وجود دارد؟

۷ وزارت کار و امور اجتماعی، مزد روزانهٔ کارگران کارخانه را به طور متوسط ۱۳۲۰ تومان با انحراف ۲۵۰ تومان تعیین نموده است. اگر کارخانه‌ای به ۴۰ کارگر خود روزانه به طور متوسط ۱۲۲۰ تومان پرداخت نماید، آیا می‌توان این کارخانه را متهم نمود که کمتر از مزد تعیین شدهٔ وزارت کار و امور اجتماعی پرداخت می‌کند.

۸ لامپهای تلویزیون موجود در بازار دارای میانگین طول عمر ۱۲۰۰ ساعت با انحراف معیار ۳۰۰ ساعت هستند. کارخانه‌ای لامپ جدیدی تولید کرده و مدعی است که میانگین طول عمر لامپهای ساخت کارخانه‌اش بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونه ۱۰۰ تایی انتخاب و میانگین طول عمر ۱۲۶۵ ساعت به دست آمده است. آیا با ادعای صاحب کارخانه موافق هستید؟

۹ یک فرایند تولید رنگ موجود است که توزیع تولید روزانه آن نرمال با میانگین ۸۰۰ و انحراف معیار ۳۰ تن است. به منظور ازدیاد تولید اصلاحاتی در این فرایند پیشنهاد شده است و یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ روزه از تولید فرایند اصلاح شده دارای میانگین ۸۱۲ تن می‌باشد. در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ آیا فرایند اصلاح شده میانگین تولید روزانه را افزایش می‌دهد؟

۳۶ استادی یک امتحان ۵۰ نمره‌ای به کلاس ریاضی عمومی داده است. جدول زیر نمره‌های ۵۰ دانشجو می‌باشد

۳۸	۳۴	۲۲	۴۱	۳۵	۴۵	۳۲	۳۷	۳۰	۲۶
۳۶	۲۸	۳۴	۱۶	۳۱	۳۳	۳۸	۳۱	۴۷	۳۶
۲۹	۲۷	۲۵	۴۳	۳۴	۳۶	۲۹	۳۹	۳۳	۳۱
۴۰	۳۵	۳۳	۳۱	۳۷	۴۴	۳۲	۴۱	۱۹	۳۴
۱۵	۴۹	۴۷	۳۸	۳۲	۲۶	۳۹	۳۰	۴۲	۳۵

الف- یک جدول فراوانی برای داده‌های فوق تشکیل دهید.

ب- آیا در سطح معنی‌دار ۱/۰ می‌توان ادعا کرد که نمرات دارای توزیع یکنواخت است؟

ج- آیا در سطح معنی‌دار ۱/۰ می‌توان ادعا کرد که نمرات دارای توزیع نرمال است؟

۳۷ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا اینکه یک شیر بیاید. اگر X برابر تعداد پرتاب این سکه باشد. بعد از تکرار این آزمایش در ۲۵۶ بار، نتایج زیر حاصل می‌شود

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد پرتاب	۱۳۶	۶۰	۳۴	۱۲	۹	۱	۳	۱

آیا در سطح معنی‌دار ۰۵/۰ می‌توان ادعا کرد که توزیع هندسی با پارامتر $\frac{۱}{۲}$ بر داده‌ها برازنده است؟

۳۸ داده‌های زیر میزان محصول ذرت را در ۱۰۰ مزرعه نشان می‌دهد. اگر در این مزارع $\sum x_i=۹۱۴۰۰$ و $s=۳۳۱/۸$ باشد، آیا میزان محصول ذرت این مزارع از توزیع نرمال پیروی می‌کند؟

تعداد مزارع	محصول (برحسب کیلوگرم)
۳	۹۹/۵ ≤ x < ۲۹۹/۵
۷	۲۹۹/۵ ≤ x < ۴۹۹/۵
۱۵	۴۹۹/۵ ≤ x < ۶۹۹/۵
۲۶	۶۹۹/۵ ≤ x < ۸۹۹/۵
۲۲	۸۹۹/۵ ≤ x < ۱۰۹۹/۵
۱۳	۱۰۹۹/۵ ≤ x < ۱۲۹۹/۵
۹	۱۲۹۹/۵ ≤ x < ۱۴۹۹/۵
۵	۱۴۹۹/۵ ≤ x < ۱۶۹۹/۵

فصل نهم

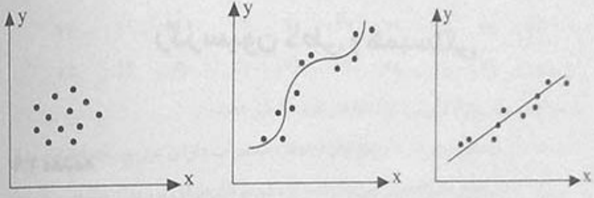
رگرسیون خطی و همبستگی

۱.۹ مقدمه

در اغلب بررسیهای آماری نیاز به پیش بینی مقدار یک متغیر وابسته از روی مقدار یک متغیر مستقل می‌باشد. برای مثال پیش بینی طول قد فرزند از روی طول قد پدرش، یا پیش بینی معدل کل یک دانشجو در یک نیمسال از روی نمرهٔ درس ریاضیات او و یا پیش بینی مقدار مصرف بنزین از روی مسافت طی شدهٔ اتومبیل از این نوع مسائل می‌باشند. چنین مسائلی را مسائل **برگشت یا رگرسیون** گویند. متغیر مستقل را با x و متغیر وابسته را با $Y|x$ و یا برای راحتی با Y نمایش می‌دهند. برای مثال در پیش بینی طول قد فرزند از روی طول قد پدرش، طول قد پدر را که یک مقدار ثابت و بخصوص است با x نمایش می‌دهیم و چون برای یک طول قد پدر x، فرزندان او می‌توانند طول قدهای متفاوت داشته باشند بنابراین طول قد فرزند او را با متغیر تصادفی $Y|x$ یا Y نشان می‌دهیم. به همین ترتیب در پیش بینی مقدار مصرف بنزین، برای مسافت معین طی شدهٔ x میزان مصرف بنزین را با Y نمایش می‌دهیم.

برای یافتن رابطه بین متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ Y ابتدا یک نمونهٔ تصادفی از جمعیت مورد نظر جمع آوری می‌کنیم. یعنی به ازاء مقادیر x_1، x_2، ... و x_n از متغیر مستقل x مقادیر مربوط به متغیر وابسته Y را اندازه‌گیری می‌کنیم. فرض کنید این مقادیر اندازه‌گیری شده y_1، y_2، ... و y_n باشند. بنابراین نمونهٔ تصادفی ما به صورت زوجهای (x_1,Y_1)، (x_2,Y_2)، ... و (x_n,Y_n) است که مقادیر مشاهدهٔ شده آن عبارت است از (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ... و (x_n,y_n). برای پی بردن به رابطهٔ

بین x و Y ابتدا این مشاهدات که به صورت نقاطی در صفحه هستند را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم که به آن نمودار پراکندگی گویند. در شکل ۱.۹ نمودار پراکندگی نقاط برای حالتهای مختلف رسم شده است. توجه کنید که برای یک مقدار x ممکن است چندین مقدار برای y وجود داشته باشد.



الف- x و y رابطه خطی دارند   ب- x و y رابطه غیر خطی دارند   ج- x و y رابطه‌ای ندارند

شکل ۱.۹ نمودارهای پراکندگی نقاط

حال براین نقاط می‌توان یک خط یا منحنی عبور داد و این خط یا منحنی رابطهٔ بین x و y را مشخص می‌کند. بنابراین در حالت کلی اگر بخواهیم مقدار متغیر Y را از روی مقدار متغیر x پیش بینی کنیم احتیاج به یک رابطه بین x و Y داریم که این رابطه یک معادلهٔ پیش بینی کننده است که به آن معادلهٔ رگرسیون Y روی x گویند.

۲.۹ رگرسیون سادهٔ خطی

هر گاه بین متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ $Y=Y|x$ یک رابطهٔ خطی برقرار باشد گوئیم یک مدل رگرسیون سادهٔ خطی بین x و Y برقرار است. برای تشکیل این رابطهٔ خطی، فرض کنید یک نمونهٔ تصادفی (x_1,Y_1)، (x_2,Y_2)، ... و (x_n,Y_n) با مقادیر مشاهده شدهٔ (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ... و (x_n,y_n) داشته باشیم. توجه کنید که $Y_i=Y|x_i \ , \ i=1,2,\ldots,n$. منظور از رگرسیون خطی این است که میانگین $Y|x$ به طور خطی با x در ارتباط باشد یعنی $\mu_{Y|x}=E(Y|x)=\alpha+\beta x$ که به آن خط رگرسیون گویند و در آن α و β پارامترهای نامعلوم هستند که بایستی برآورد شوند. به α و β ضرایب رگرسیون گویند اگر برآورد α و β را با $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نمایش دهیم در این صورت

مقدار برآورد متغیر وابستهٔ y را با $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ نمایش می‌دهند. در زیر روشی برای برآورد ضرایب رگرسیونی α و β از روی نمونه ارائه می‌دهیم و از روی آن بوسیلهٔ $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ برای مقدار بخصوص x، مقدار متغیر وابستهٔ y را پیش بینی می‌کنیم.

در نمونهٔ تصادفی (x_1,Y_1)، (x_2,Y_2)، ... و (x_n,Y_n) چون همواره مقدار $Y_i=Y|x_i$ برابر $\mu_{Y|x_i}=E(Y|x_i)$ نیست، بنابراین اختلاف آنها برابر یک مقدار تصادفی E_i می‌باشد یعنی

$$\boxed{Y_i=\mu_{Y|x_i}+E_i=\alpha+\beta x_i+E_i \ , \ i=1,2,\ldots,n} \qquad (۱.۹)$$

این مدل را **مدل رگرسیون سادهٔ خطی** گویند و E_i را که یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس σ^2 است را مقدار خطا گویند. اگر مقدار مشاهده شده E_i را با e_i نشان دهیم، در این صورت

$$y_i=\alpha+\beta x_i+e_i \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

که e_i را مقدار باقیمانده گویند. حال برای یافتن برآوردهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ بگونه‌ای عمل می‌کنیم که مجموع مربعات باقیمانده‌ها یعنی $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ می‌نیمم گردد.

روش حداقل مربعات مجموع مربعات باقیمانده‌ها را معمولاً مجموع مربعات خطاها حول خط رگرسیون گویند و با SSE[1] نمایش می‌دهند، یعنی

$$\boxed{SSE=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2} \qquad (۲.۹)$$

مقادیری از $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ که SSE را می‌نیمم کند، برآوردهای حداقل مربعات گویند و روش بدست آوردن آنها را روش **حداقل مربعات**[2] می‌نامند که در زیر به ذکر آن می‌پردازیم.

ابتدا کمیتهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}$$

$$S_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n}$$

1- Sum of Square Errors
2- Least Squares Method

$$S_{xy}=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i-\frac{(\sum_{i=۱}^{n}x_i)(\sum_{i=۱}^{n}y_i)}{n}$$

قضیهٔ ۱.۹ در یک مدل رگرسیون ساده خطی مقادیر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ که مجموع مربعات خطاها را می‌نیمم می‌کنند عبارت‌اند از

$$\boxed{\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}\ ,\quad \hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}} \qquad (۳.۹)$$

اثبات با مشتق‌گیری از SSE نسبت به α و β و مساوی صفر قرار دادن آنها به معادلات زیر می‌رسیم

$$\begin{cases}\sum_{i=۱}^{n}y_i-n\alpha-\beta\sum_{i=۱}^{n}x_i=۰\\ \sum_{i=۱}^{n}x_iy_i-\alpha\sum_{i=۱}^{n}x_i-\beta\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲=۰\end{cases}$$

که از حل این دستگاه جوابهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ داده شده در (۳.۹) حاصل می‌شوند و می‌توان نشان داد که این مقادیر SSE را می‌نیمم می‌کنند.

بنابراین خط رگرسیون $\mu_{Y|x}=\alpha+\beta x$ بوسیلهٔ خط $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ برآورد می‌شود، که $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ از رابطهٔ (۳.۹) به دست می‌آیند.

مثال ۱.۲.۹ برای داده‌های جدول زیر برآورد خط رگرسیون را بیابید. سپس نقاط را در صفحه مشخص نموده و خط برآورد شده را رسم کنید.

x_i	۱	۳	۴	۶	۸	۹	۱۱	۱۴
y_i	۱	۲	۴	۴	۵	۷	۸	۹

حل از جدول فوق مقادیر زیر حاصل می‌شوند

$$\sum x_i=۵۶\ ,\ \sum y_i=۴۰\ ,\ \sum x_i^۲=۵۲۴\ ,\ \sum y_i^۲=۲۵۶\ ,\ \sum x_iy_i=۳۶۴$$

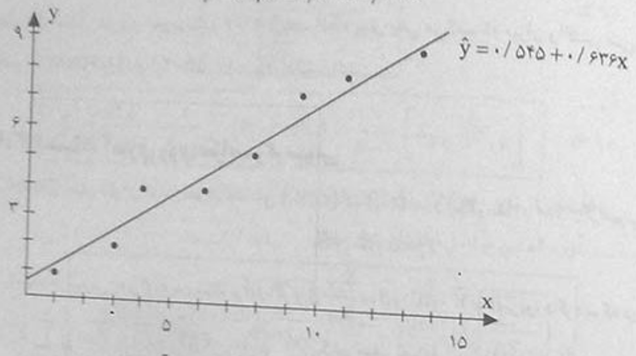
بنابراین

$$S_{xy}=۳۶۴-\frac{(۵۶)(۴۰)}{۸}=۸۴\ ,\quad S_{xx}=۵۲۴-\frac{(۵۶)^۲}{۸}=۱۳۲$$

$$\hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{۸۴}{۱۳۲}=۰/۶۳۶\ ,\quad \hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=\frac{۴۰}{۸}-(۰/۶۳۶)\frac{۵۶}{۸}=۰/۵۴۵$$

و در نتیجه

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x=۰/۵۴۵+۰/۶۳۶x$$



شکل ۲.۹ نمودار پراکندگی نقاط و خط رگرسیون برآورد شده

مثال ۲.۲.۹ آزمایشی به منظور مطالعه اثر یک داروی معین در پایین آوردن ضربان قلب در افراد بالغ انجام شده است. مقدار داروی تجویز شده بر حسب میلی گرم و تفاوت ضربان قلب پس از استعمال دارو و قبل از آن برای یک نمونه ۱۳ تایی در جدول زیر آورده شده است

مقدار داروی تجویز شده	۰/۵	۰/۷۵	۱/۰	۱/۲۵	۱/۵	۱/۷۵	۲/۰
واکنش در ضربان قلب	۱۰	۸	۱۲	۱۲	۱۴	۱۲	۱۶
مقدار داروی تجویز شده	۲/۲۵	۲/۵	۲/۷۵	۳	۳/۲۵	۳/۵	
واکنش در ضربان قلب	۱۸	۱۷	۲۰	۱۸	۲۰	۲۱	

برآورد خط رگرسیون را به دست آورید. اگر مقدار داروی تجویز شده ۱/۶ باشد، واکنش در ضربان قلب در دقیقه را به چه میزان پیش بینی می‌کنید؟

حل از جدول فوق مقادیر زیر حاصل می‌شوند:

$$\sum x_i=۲۶,\ \sum x_i^۲=۶۳/۳۷۵,\ \sum y_i=۱۹۸,\ \sum y_i^۲=۳۲۲۶,\ \sum x_iy_i=۴۴۲/۵$$

$$S_{xy}=۴۴۲/۵-\frac{(۲۶)(۱۹۸)}{۱۳}=۴۶/۵\ ,\ S_{xx}=۶۳/۳۷۵-\frac{(۲۶)^۲}{۱۳}=۱۱/۳۷۵$$

بنابراین

$$\hat{\beta}=\frac{۴۶/۵}{۱۱/۳۷۵}=۴/۰۸۸\ ,\quad \hat{\alpha}=\frac{۱۹۸}{۱۳}-(۴/۰۸۸)\frac{۲۶}{۱۳}=۷/۰۵۵$$

در نتیجه

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x=۷/۰۵۵+۴/۰۸۸x$$

حال اگر مقدار داروی تجویز شده $x=۱/۶$ باشد آنگاه پیش بینی می‌کنیم که میزان واکنش ضربان قلب $\hat{y}=۷/۰۵۵+۴/۰۸۸(۱/۶)\approx ۱۳/۶$ در دقیقه باشد.

۳.۹ استنباط آماری روی ضرایب رگرسیونی

در بخش قبل بر اساس نمونهٔ تصادفی (x_1,Y_1)، (x_2,Y_2)، ... و (x_n,Y_n) در مدل رگرسیونی

$$Y_i=\alpha+\beta x_i+E_i \qquad i=1,2,...,n$$

ضرایب رگرسیونی α و β را به وسیلهٔ برآوردگرهای $\hat{\beta}=\frac{S_{xY}}{S_{xx}}$ و $\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{x}$ برآورد کردیم که در آن $\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$, $S_{xY}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})$ دو متغیر تصادفی می‌باشند. حال اگر در مدل رگرسیونی فوق فرض کنیم $E_i\sim N(0,\sigma^2)$, $i=1,2,...,n$ و E_1، E_2، ... و E_n از یکدیگر مستقل باشند، در این صورت چون Y_i یک ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی نرمال E_i می‌باشد، پس $Y_i\sim N(\alpha+\beta x_i,\sigma^2)$, $i=1,2,...,n$. بر اساس توزیع متغیرهای تصادفی Y_i می‌توان توزیع $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ و SSE را به دست آورد. توزیع این برآوردگرها را در قضیهٔ زیر بدون اثبات می‌آوریم.

قضیهٔ ۲.۹ در مدل رگرسیونی سادهٔ خطی با فرض $E_i\sim N(0,\sigma^2)$, $i=1,2,...,n$ داریم که

الف- $\hat{\alpha}\sim N(\alpha,\frac{\sigma^2\sum x_i^2}{nS_{xx}})$

ب- $\hat{\beta}\sim N(\beta,\frac{\sigma^2}{S_{xx}})$

ج- اگر $S^2=\frac{SSE}{n-2}$ آنگاه $\frac{SSE}{\sigma^2}=\frac{(n-2)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-2)}$

د- $\hat{\alpha}$ و S^2 و همچنین $\hat{\beta}$ و S^2 از یکدیگر مستقل هستند.

با استفاده از قضیهٔ ۲.۹ می‌توان نتایج زیر را به دست آورد

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}}\sim t_{(n-2)} \qquad (۴.۹)$$

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{S\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}}}\sim t_{(n-2)} \qquad (۵.۹)$$

که در آن

$$S^2=\frac{SSE}{n-2}=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)^2=\frac{1}{n-2}\left[S_{YY}-\hat{\beta}S_{xY}\right] \qquad (۶.۹)$$

با استفاده از تابع محورهای (۴.۹) و (۵.۹) می‌توان فواصل اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای α و β به دست آورد که این فواصل اطمینان عبارتند از

$$\alpha\in\left(\hat{\alpha}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}}\ ,\ \hat{\alpha}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}}\right)$$
$$\beta\in\left(\hat{\beta}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\ ,\ \hat{\beta}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\right) \qquad (۷.۹)$$

با استفاده از روابط (۴.۹) و (۵.۹) می‌توان آزمونهای آماری را روی α و β انجام داد که این آزمونها در جدول ۱.۹ آورده شده‌اند.

H_0	آمارهٔ آزمون	H_1	ناحیه بحرانی
$\alpha=\alpha_0$	$T=\frac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{S\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}}}$	$\alpha>\alpha_0$	$T>t_{1-\alpha}(n-2)$
		$\alpha<\alpha_0$	$T<-t_{1-\alpha}(n-2)$
		$\alpha\neq\alpha_0$	$\lvert T\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$
$\beta=\beta_0$	$T=\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}}$	$\beta>\beta_0$	$T>t_{1-\alpha}(n-2)$
		$\beta<\beta_0$	$T<-t_{1-\alpha}(n-2)$
		$\beta\neq\beta_0$	$\lvert T\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

جدول ۱.۹ آزمونهای آماری روی ضرایب رگرسیونی α و β

مثال ۱.۳.۹ مواد اولیه‌ای که برای ساختن الیاف مصنوعی به کار می‌رود در انبار مرطوبی نگهداری می‌شود. نتایج حاصل از اندازه‌گیریهای رطوبت نسبی در انبار و میزان رطوبت در یک نمونه مواد اولیه (هر دو بر حسب درصد) در ۱۲ روز در جدول زیر ثبت شده است

رطوبت انبار x	۴۲	۳۵	۵۰	۴۳	۴۸	۶۲
رطوبت مواد اولیه y	۱۲	۸	۱۴	۹	۱۱	۱۶
رطوبت انبار x	۳۱	۳۶	۴۴	۳۹	۵۵	۴۸
رطوبت مواد اولیه y	۷	۹	۱۲	۱۰	۱۳	۱۱

الف- برآورد خط رگرسیون را به دست آورید.

ب- یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای β بسازید.

ج- آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌توان ادعا کرد که $\alpha=-1$ است؟

حل الف- از جدول فوق مقادیر زیر حاصل می‌شوند:

$$\sum x_i=533\ ,\ \sum x_i^2=24529\ ,\ \sum y_i=132\ ,\ \sum y_i^2=1526\ ,\ \sum x_iy_i=6093$$

بنابراین

$$S_{xy}=6093-\frac{(533)(132)}{12}=230\quad ,\quad S_{xx}=24529-\frac{(533)^2}{12}=854/917$$

$$S_{yy}=1526-\frac{(132)^2}{12}=74\quad ,\quad \hat{\beta}=\frac{230}{854/917}=0/269$$

$$\hat{\alpha}=\frac{132}{12}-(0/269)\frac{533}{12}=-0/948\quad ,\quad s^2=\frac{1}{10}\left[74-(0/269)(230)\right]=1/213$$

در نتیجه

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x=-0/948+0/269x$$

ب- با استفاده از فواصل اطمینان (۷.۹) داریم که

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)=t_{0/975}(10)=2/23$$

$$\beta\in\left(0/269-2/23\sqrt{\frac{1/213}{854/917}},\ 0/269+2/23\sqrt{\frac{1/213}{854/917}}\right)=(0/185\ ,\ 0/353)$$

بنابراین ۹۵ درصد اطمینان داریم که β در فاصلهٔ فوق قرار دارد.

ج- در این مثال با آزمون $\begin{cases}H_0:\ \alpha=-1\\ H_1:\ \alpha\neq-1\end{cases}$ مواجه هستیم و با استفاده از جدول ۱.۹ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر $|T|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ که در آن

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)=t_{0/995}(10)=3/17$$

$$T=\frac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{s\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}}}=\frac{-0/948+1}{\sqrt{\frac{(1/213)(24529)}{(12)(854/917)}}}=0/0305$$

چون $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)=3/17\not> |T|=0/0305$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی $\alpha=-1$ می‌باشد.

مثال ۲.۳.۹ نمره‌های امتحان میان ترم و پایان ترم یک کلاس ۹ نفره از دانشجویان به صورت زیر است

میان ترم	۶	۵	۷	۷	۴	۶	۴	۵	۳
پایان ترم	۱۰	۸	۱۱	۱۲	۱۱	۹	۱۰	۹	۶

الف- برآورد خط رگرسیونی را برای پیش بینی نمرهٔ پایان ترم از روی نمرهٔ میان ترم به دست آورید.

ب- یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰ درصدی برای α پیدا کنید.

ج- آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌توان ادعا کرد که $\beta<2$ است؟

حل الف- اگر x نمرهٔ میان ترم و y نمرهٔ پایان ترم باشند آنگاه از جدول فوق مقادیر زیر حاصل می‌شوند

$$\sum x_i=47\ ,\ \sum x_i^2=261\ ,\ \sum y_i=86\ ,\ \sum y_i^2=848\ ,\ \sum x_iy_i=462$$

بنابراین

$$S_{xy}=462-\frac{(47)(86)}{9}=12/89\quad ,\quad S_{xx}=261-\frac{(47)^2}{9}=15/56$$

$$S_{yy}=848-\frac{(86)^2}{9}=26/22\quad ,\quad \hat{\beta}=\frac{12/89}{15/56}=0/828$$

$$\hat{\alpha}=\frac{86}{9}-(0/828)\frac{47}{9}=5/23\quad ,\quad s^2=\frac{1}{7}\left[26/22-(0/828)(12/89)\right]=2/22$$

در نتیجه

$$\hat{y}=۵/۲۳+۰/۸۲۸x$$

ب- چون $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-۲)=t_{۰/۹۵}(۷)=۱/۹$ بنابراین از (۷.۹) داریم که

$$\alpha\in\left(۵/۲۳-۱/۹\sqrt{\frac{(۲/۲۲)(۲۶۱)}{(۹)(۱۵/۵۶)}},\ ۵/۲۳+۱/۹\sqrt{\frac{(۲/۲۲)(۲۶۱)}{(۹)(۱۵/۵۶)}}\right)=(۱/۳۶۵,۹/۰۹۵)$$

بنابراین ۹۰ درصد اطمینان داریم که α در فاصلهٔ فوق قرار دارد.

ج- در این مثال با آزمون $\begin{cases}H_۰:\beta=۲\\ H_۱:\beta<۲\end{cases}$ مواجه هستیم و با استفاده از جدول ۱.۹ فرض $H_۰$ رد می‌شود اگر و فقط اگر $T<-t_{1-\alpha}(n-۲)$ که در آن

$$t_{1-\alpha}(n-۲)=t_{۰/۹۵}(۷)=۱/۹$$

$$T=\frac{\hat{\beta}-\beta_۰}{\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}}=\frac{۰/۸۲۸-۲}{\sqrt{\frac{۲/۲۲}{۱۵/۵۶}}}=-۳/۱۰۳$$

چون $-۱/۹=-t_{1-\alpha}(n-۲)>T=-۳/۱۰۳$ پس فرض $H_۰$ رد می‌شود یعنی $\beta<۲$ است.

۴.۹ ضریب همبستگی خطی

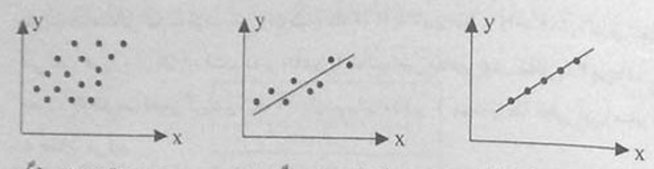
تاکنون فرض کردیم که متغیر مستقل x یک متغیر کنترل شده است و یک متغیر تصادفی نیست. حال فرض کنید که هم متغیر X و هم Y هر دو متغیر تصادفی باشند.

روشهای رگرسیونی موقعی مناسب هستند که متغیر تصادفی Y به متغیر تصادفی X که اغلب به وسیلهٔ پژوهشگر کنترل می‌شود بستگی داشته باشد. برای سنجش میزان وابستگی دو متغیر تصادفی X و Y از معیاری بنام ضریب همبستگی خطی استفاده می‌شود که در بخش ۴.۴ آن را در جمعیت به صورت زیر تعریف کردیم

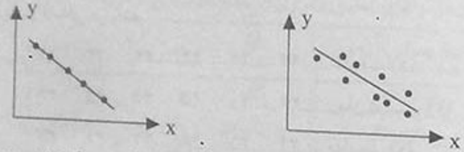
$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

و در بخش ۴.۴ مشاهده کردیم که ضریب همبستگی خطی به مبداء و واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد و همواره $-۱\le\rho\le۱$ می‌باشد. در شکل ۳.۹ حالتهای مختلف از همبستگی خطی X و

Y نشان داده شده است.



الف- $\rho=۱$ همبستگی کامل مثبت ب- $۰<\rho<۱$ همبستگی مثبت ج- $\rho=۰$ عدم همبستگی



د- $-۱<\rho<۰$ همبستگی منفی ه- $\rho=-۱$ همبستگی کامل منفی

شکل ۳.۹ حالتهای مختلف همبستگی خطی بین متغیرهای X و Y

برای برآورد ضریب همبستگی یک نمونهٔ تصادفی $(X_۱,Y_۱)$، $(X_۲,Y_۲)$، ... و (X_n,Y_n) از (X,Y) را انتخاب می‌کنیم و از روی این نمونهٔ تصادفی کواریانس X و Y، واریانس X و واریانس Y را به صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$\hat{\sigma}_X^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})^۲=\frac{۱}{n-۱}S_{XX}$$

$$\hat{\sigma}_Y^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(Y_i-\bar{Y})^۲=\frac{۱}{n-۱}S_{YY}$$

$$\hat{\sigma}_{XY}=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})=\frac{۱}{n-۱}S_{XY}$$

حال با قرار دادن این برآوردگرها به جای پارامترهای $\sigma_{XY},\sigma_Y^۲,\sigma_X^۲$ در فرمول ضریب همبستگی خطی، برآوردگر ضریب همبستگی خطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\rho}=R=\frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}S_{YY}}}\qquad(۸.۹)$$

اگر مقدار مشاهدهٔ شدهٔ این نمونهٔ تصادفی $(x_۱,y_۱)$، $(x_۲,y_۲)$، ... و (x_n,y_n) باشد آنگاه برآورد

ضریب همبستگی خطی یعنی مقدار مشاهده شده R عبارت از $r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$ خواهد بود که به آن **ضریب همبستگی نمونه** گویند. می‌توان نشان داد که R با تغییر مبدأ و واحد اندازه‌گیری تغییر نمی‌کند و همواره $-1\le R\le 1$ است. تغییر مقادیر R همانند تغییر مقادیر ρ در شکل ۳.۹ می‌باشد. به مقدار R^2 **ضریب تعیین** گویند و $100R^2$٪ از تغییرات مقادیر Y جهت رابطهٔ خطی آن با متغیر X به حساب می‌آید.

مثال ۱.۴.۹ داده‌های زیر مربوط به مقاومت (بر حسب اهم) و زمان شکست (بر حسب دقیقه) ترانزیستورها با بار اضافی می‌باشد

مقاومت (x)	۴۳	۲۹	۴۴	۳۳	۳۳	۴۷
زمان شکست (y)	۳۲	۲۰	۴۵	۳۵	۲۲	۴۶
مقاومت (x)	۳۴	۳۱	۴۸	۳۴	۴۶	۳۷
زمان شکست (y)	۲۸	۲۶	۳۷	۳۳	۴۷	۳۰

ضریب همبستگی نمونه را به دست آورید و آن را تعبیر کنید.

حل از جدول فوق مقادیر زیر حاصل می‌شوند

$$\sum x_i=459,\ \sum x_i^2=18075,\ \sum y_i=401,\ \sum y_i^2=14301,\ \sum x_iy_i=15907$$

بنابراین

$$S_{xy}=15907-\frac{(459)(401)}{12}=568/75,\quad S_{xx}=18075-\frac{(459)^2}{12}=518/25$$

$$S_{yy}=14301-\frac{(401)^2}{12}=900/917$$

در نتیجه

$$r=\frac{568/75}{\sqrt{(518/25)(900/917)}}=0/832$$

چون مقدار r به یک نزدیک است پس یک رابطهٔ خطی نسبتاً خوبی در جهت مثبت بین X و Y برقرار است. همچنین چون $r^2=0/693$ پس ۶۹/۳٪ از تغییرات Y جهت رابطهٔ خطی آن با X به حساب می‌آید.

استنباط آماری روی ρ

برای استنباط آماری روی ρ نیاز به داشتن توزیع احتمال R ضریب همبستگی نمونهٔ

تصادفی داریم. فیشر[1] آماردان انگلیسی ثابت کرده است که آماره $W=\frac{1}{2}Ln\frac{1+R}{1-R}$ برای اندازهٔ نمونهٔ بزرگ تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین تقریبی $\mu_W\approx\frac{1}{2}Ln\frac{1+\rho}{1-\rho}$ و واریانس تقریبی $\sigma_W^2\approx\frac{1}{n-3}$ می‌باشد. یعنی به طور تقریبی داریم که:

$$Z=\frac{W-\mu_W}{\sigma_W}\sim N(0,1) \qquad (9.9)$$

با استفاده از تابع محور (۹.۹) می‌توان برای ρ فاصلهٔ اطمینان پیدا کرد و با استفاده از توزیع (۹.۹) می‌توان آزمونهای آماری را روی ρ انجام داد که این آزمونها در جدول ۲.۹ آورده شده‌اند.

H_0	آمارهٔ آزمون	H_1	ناحیهٔ بحرانی آزمون
$\rho=\rho_0$	$Z=\frac{W-\mu_{W_0}}{\sigma_W}$	$\rho>\rho_0$	$Z>z_{1-\alpha}$
		$\rho<\rho_0$	$Z<-z_{1-\alpha}$
		$\rho\neq\rho_0$	$\lvert Z\rvert>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

جدول ۲.۹ آزمونهای آماری روی ρ که $\mu_{W_0}=\frac{1}{2}Ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$ می‌باشد.

مثال ۲.۴.۹ در مثال ۱.۴.۹ آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌توان ادعا کرد که $\rho>0/5$ است.

حل در این مثال با آزمون $\begin{cases}H_0: \rho=0/5\\ H_1: \rho>0/5\end{cases}$ مواجه هستیم و با استفاده از جدول ۲.۹ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر $Z>z_{1-\alpha}$ که در آن

$$r=0/832,\quad w=\frac{1}{2}Ln\frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{2}Ln\frac{1/832}{0/168}=1/195$$

$$\mu_{W_0}=\frac{1}{2}Ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}=\frac{1}{2}Ln\frac{1/5}{0/5}=0/549$$

$$\sigma_w=\sqrt{\frac{1}{n-3}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=0/333,\quad Z=\frac{w-\mu_{W_0}}{\sigma_w}=\frac{1/195-0/549}{0/333}=1/94$$

$$z_{1-\alpha}=z_{0/95}=1/645$$

چون $Z=1/94>z_{1-\alpha}=1/645$ پس فرض H_0 رد می‌شود یعنی $\rho>0/5$ است.

1- Fisher

۵.۹ تمرینات

۱ برای تعیین رابطه بین هزینه حمل یک نوع کالا و فاصلهٔ فروشگاه از محل توزیع کالا، یک نمونهٔ تصادفی شامل ۸ فروشگاه که این کالا را عرضه می‌کنند انتخاب و فاصلهٔ فروشگاه تا محل توزیع کالا و هزینهٔ حمل ۱۰۰ واحد از این کالا در جدول زیر ثبت شده است

x فاصله به کیلومتر	۶	۱۳	۲۷	۱۵	۹	۱۱	۲۱	۱۴
y هزینهٔ حمل بر حسب صد تومان	۲۹	۹۳	۱۵۹	۱۱۵	۶۶	۹۰	۱۳۹	۹۸

برآورد خط رگرسیون هزینهٔ حمل کالا بر حسب فاصله را به دست آورید. اگر فاصلهٔ یک فروشگاه تا محل توزیع ۱۰ کیلومتر باشد، هزینهٔ حمل ۱۰۰ واحد کالا تا این فروشگاه را به چه میزان پیش بینی می‌کنید؟

۲ می‌خواهیم به داده‌های حاصل از قدرت کشش y، ده قطعه پلاستیک که هر یک x دقیقه پخته شده‌اند، یک خط راست برازش کنیم. داده‌ها در جدول زیر ثبت شده‌اند. برآورد خط رگرسیون مورد نظر را به دست آورید.

x	۲۳	۳۵	۴۵	۶۵	۷۵	۹۵	۱۰۵	۱۲۵	۱۵۵	۱۸۵
y	۲	۹/۸	۹/۲	۲۶/۲	۱۷/۱	۲۴/۸	۴۳	۵۵/۳	۳۸/۴	۶۳/۳

۳ از یک نمونهٔ تصادفی از ۱۰ مرد ۳۰ ساله اطلاعات زیر در مورد حقوق سالیانه کنونی (بر حسب صد هزار تومان) و تعداد سالهای تحصیلی رسمی که داشته‌اند به دست آمده است.

x سالهای تحصیل	۱۰	۱۲	۱۳	۱۴	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۸	۲۰
y حقوق سالیانه	۷/۰	۶/۲	۸/۱	۷/۵	۶/۵	۱۰/۵	۸/۰	۱۳/۲	۱۲/۸	۱۶/۵

برآورد خط رگرسیون حقوق سالیانه بر حسب تعداد سالهای تحصیل را به دست آورید. اگر مردی ۱۵ سال تحصیل کرده باشد، حقوق سالیانهٔ او را به چه میزان پیش بینی می‌کنید؟

۴ یک نوع مادهٔ شیمیایی داریم که در x درجه حرارت y گرم آن تجزیه می‌شود. در پنج آزمایش داده‌های زیر به دست آمده‌اند:

x	۲-	۱-	۰	۱	۲
y	۵	۴	۳	۲	۱

الف- برآورد خط رگرسیون مقدار مادهٔ تجزیه شده بر حسب درجه حرارت را به دست

آورید.

ب- نقاط داده شده و خط برآورد شده را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ج- اگر درجه حرارت ۳ باشد، مقدار ماده‌ای را که تجزیه می‌شود پیش بینی کنید.

۵ در جدول زیر نیروی کشش به کار رفته برای یک نمونه فولاد، بر حسب هزار پوند و طول حاصل از کشش بر حسب یک هزارم اینچ می‌باشد

x نیروی کشش	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y طول	۱۴	۳۳	۴۰	۶۳	۷۶	۸۵

الف- با رسم نمودار پراکندگی داده‌ها، تأیید کنید که فرض خطی بودن رگرسیون y روی x معقول است.

ب- برآورد خط رگرسیون را به دست آورده و با استفاده از آن وقتی نیروی کشش ۳/۵ هزار پوند باشد، طول حاصل را پیش بینی کنید.

ج- برای ضرایب رگرسیونی α و β فواصل اطمینان ۹۵ درصدی را تشکیل دهید.

۶ یک مطالعه توسط یک خرده فروش در ارتباط با رابطهٔ بین مخارج تبلیغ و میزان فروش (هر دو بر حسب هزار تومان) به طور هفتگی صورت پذیرفته است و داده‌های زیر به دست آمده است

مخارج تبلیغ	۴۰	۲۰	۲۵	۲۰	۳۰	۵۰	۴۰	۲۰	۵۰	۴۰	۲۵	۵۰
فروش	۳۸۵	۴۰۰	۳۹۵	۳۶۵	۴۷۵	۴۴۰	۴۹۰	۴۲۰	۵۶۰	۵۲۵	۴۸۰	۵۱۰

الف- معادله خط رگرسیون را جهت پیش بینی فروش هفتگی از روی هزینهٔ تبلیغات پیدا کنید.

ب- فاصلهٔ اطمینان ۹۰ درصدی را برای β به دست آورید.

۷ در تمرین ۳، آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ ادعا کرد که $\beta>0$ است؟

۸ داده‌های زیر مربوط به تعداد کارها بر حسب روز و زمان لازم برای پردازش مرکزی (CPU) می‌باشد.

x تعداد کارها	۱	۲	۳	۴	۵
y زمان (CPU)	۲	۵	۴	۹	۱۰

الف- معادلهٔ خط رگرسیون را جهت پیش بینی زمان (CPU) بر حسب تعداد کارها پیدا

P(X<a) = P(X≤a-1)

جدول I : توزیع دو جمله‌ای

جدول برای P(X≤a) است.

n	r	p									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

جدول II : توزیع پواسون

r	μ								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

r	μ								
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

جدول برای P(X≤a) است.

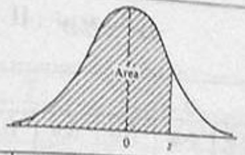
ادامه جدول II : توزیع پواسون

r	μ 5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9466	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22							1.0000	0.9999	0.9999
23								1.0000	0.9999
24									1.0000

ادامه جدول II : توزیع پواسون

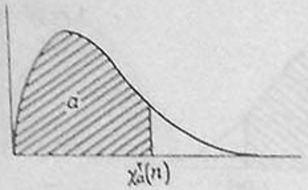
r	μ 10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3750
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317
25		0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554
26		1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718
27			0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827
28			1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897
29				1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941
30					0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967
31					1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982
32						1.0000	0.9999	0.9996	0.9990
33							0.9999	0.9998	0.9995
34							1.0000	0.9999	0.9998
35								1.0000	0.9999
36									0.9999
37									1.0000

جدول III : توزیع نرمال



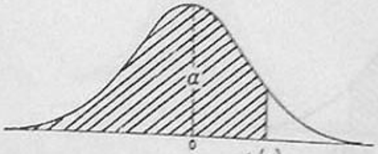
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول IV : توزیع مربع-کای



n	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24,	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

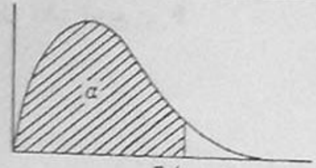
جدول V : توزیع t



$t_\alpha(n)$

n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

جدول VI : توزیع F ۰/۹۰



$F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$

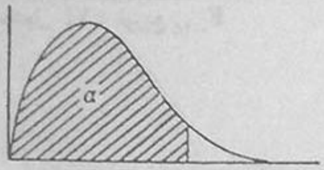
ν_2 \ ν_1 (Denominator Degrees of Freedom)	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63

ادامه جدول VI : توزیع $F_{./۹۰}$

ν_2 \ ν_1	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Denominator Degrees of Freedom

ادامه جدول VI : توزیع $F_{./۹۵}$



$F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$

ν_2 \ ν_1	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.77
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

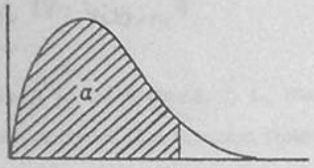
Denominator Degrees of Freedom

ادامه جدول VI : توزیع $F_{0/95}$

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM									
1	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Denominator Degrees of Freedom

ادامه جدول VI : توزیع $F_{0/99}$



$F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM								
1	4,052	4,999.5	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,022
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

Denominator Degrees of Freedom

ادامه جدول VI : توزیع $F_{.99}$

@Kiau_IT

www.mohandesid..ir

ν_2 \ ν_1	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6.056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Denominator Degrees of Freedom

مراجع

1- Hodges, J. L. and Lehmann, E. L., Basic Concepts of Probability and Statistics, 2nd ed., San Francisco, Holden-Day, 1970.

2- Johnson, R. A. and Bhattacharyya, G. K., Statistics: Principles and Methods, 2nd ed., New york, John Wiley and Sons, 1992.

3- Larson, H. J., Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, 2nd ed., New york, John Wiley and Sons, 1974.

4- Miller, I., Freund, J. E. and Johnson, R. A., Probability and Statistics for Engineers, 5th ed., Printice Hall, 1994.

5- Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., Introduction to the Theory of Statistics, 3rd ed., New york, Mc Graw-Hill Book Company, 1974.

6- Ross, S., A First Course in Probability, 3rd ed., New york, Macmillan Publishing Company, 1989.

7- Walpole, R. E. and Myers, R. H., Probability and Statistics for Engineers and Scientists, 5th ed., New york, Macmillan Publishing Company, 1993.

۸- آمار و احتمال مقدماتی، تألیف دکتر جواد بهبودیان، چاپ سیزدهم (۱۳۷۸).